MATEMATIKA

Nizovi

Nizovi

Knjiga „*Matematika za IT*”

- Poglavlje „Nizovi”, str. 89. – 102.

Definicija niza

Nabrajanje nekih objekata, poput

$$2, 4, 8, \ldots$$

ili

$$kruška, jabuka, šljiva, \ldots$$

naziva se nizom.

U matematici je taj pojam definiran pomoću funkcija.

Niz je svako preslikavanje sa skupa prirodnih brojeva u neki skup objekata S:

$$a: \mathbb{N} \to S$$

Definicija niza

Elemente niza $a\colon \mathbb{N} \to S$ ne zapisujemo kao funkcije, $a(1), a(2), a(3)$ ... već uz pomoć indeksa: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Skup S iz kojega uzimamo elemente niza, u pravilu je skup realnih brojeva, te tako govorimo o *nizu realnih brojeva*.

Prva dva primjera niza opisana su nabrajanjem članova.

No to je neprecizan način zadavanja niza.

Koji elementi dolaze nakon zadnjeg navedenog elementa?

Definicija niza

Koji elementi dolaze nakon zadnjeg navedenog elementa?

Odgovor na to pitanje može ponuditi pretpostavka da nizovi slijede neko pravilo – da postoji pravilnost koja će nam omogućiti određivanje svakog potrebnog člana u nizu.

To nas vodi do dva osnovna načina zadavanja niza:

- pomoću rekurzivne formule
- pomoću općeg člana niza

Rekurzija

Promotrimo primjer niza s početka:

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

Jedan način da istaknemo pravilo konstruiranja tog niza je uočiti kako je svaki slijedeći element dva puta veći od prethodnog:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 4$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 = 8$$
$$a_4 = 2 \cdot a_3 = 16$$
$$a_5 = 2 \cdot a_4 = 32$$
$$\ldots$$

Rekurzija

Promotrimo primjer niza s početka:

$$2, 4, 8, 16, \dots$$

To je način zadavanja niza uz pomoć **rekurzivnog pravila**:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1}$$

(ili: $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$)

No da bi tako zadani niz bio smislen, moramo posebno zadati i koliko iznosi prvi član:

$$a_1 = 2$$

Zadavanje prvog člana naziva se **bazom rekurzije**.

Rekurzija

Općenito, niz zadajemo rekurzivno tako da zadamo **rekurzivno pravilo** na koji način se računa n-ti član niza pomoću nekog broja prethodnih članova, te da zadamo **bazu rekurzije**.

Promotrimo slijedeće rekurzivno pravilo:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Da bi smo mogli koristiti ovo rekurzivno pravilo, moramo poznavati dva prethodna elementa u nizu.

Zbog toga kao bazu rekurzije moramo zadati **dva člana**!

Na primjer: $a_1 = 1, a_2 = 1$.

Rekurzija

Odredite prvih šest članova niza zadanih rekurzijom

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

$$a_3 = a_2 + a_1 \quad = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 \quad = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 \quad = 3 + 2 = 5$$

$$a_6 = a_5 + a_4 \quad = 5 + 3 = 8$$

Fibonaccijev niz

Spomenuti niz opisao je talijanski matematičar Leonardo iz Pise, koji je bio poznat i pod imenom Fibonacci.

Fibonacci je godine 1202. objavio knjigu „Liber Abaci” („Računica”) u kojoj je objasnio kako se računa u arapskom dekadskom zapisu brojeva.

Fibonaccijev niz

Njegov rad je značajno utjecao na prihvaćanje suvremenog dekadskog brojevnog sustava (umjesto rimskih brojeva koji su se do tada koristili).

Prelazak na dekadski brojevni sustav imao je nemjerljiv utjecaj na kasniji razvoj znanosti.

No Fibonacci je ostao poznat po „problemu zečeva” koji je opisao u istoj knjizi.

Fibonaccijev niz

Postavimo idealizirane pretpostavke:

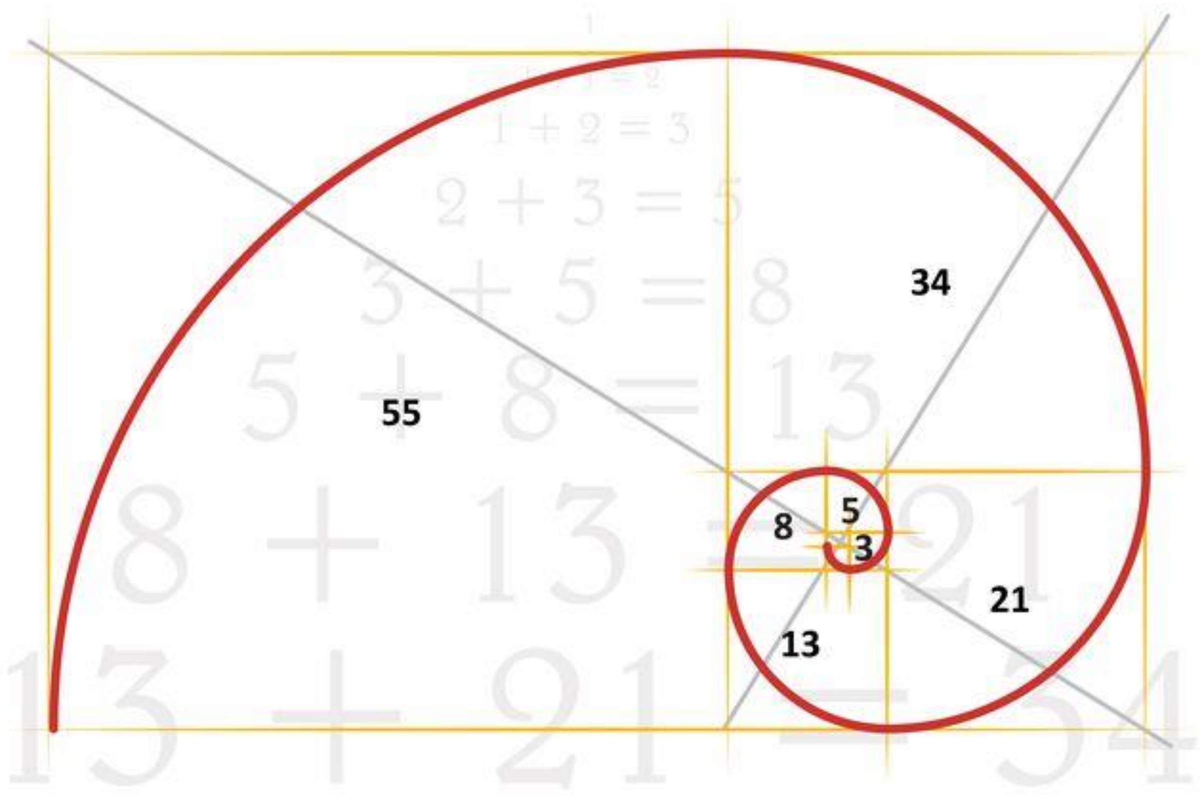
- svaki par zečeva postaje plodan nakon dva mjeseca, i nakon toga svakog mjeseca donese na svijet novi par zečeva
- zečevi ne umiru :D
- počinjemo s jednim parom zečeva

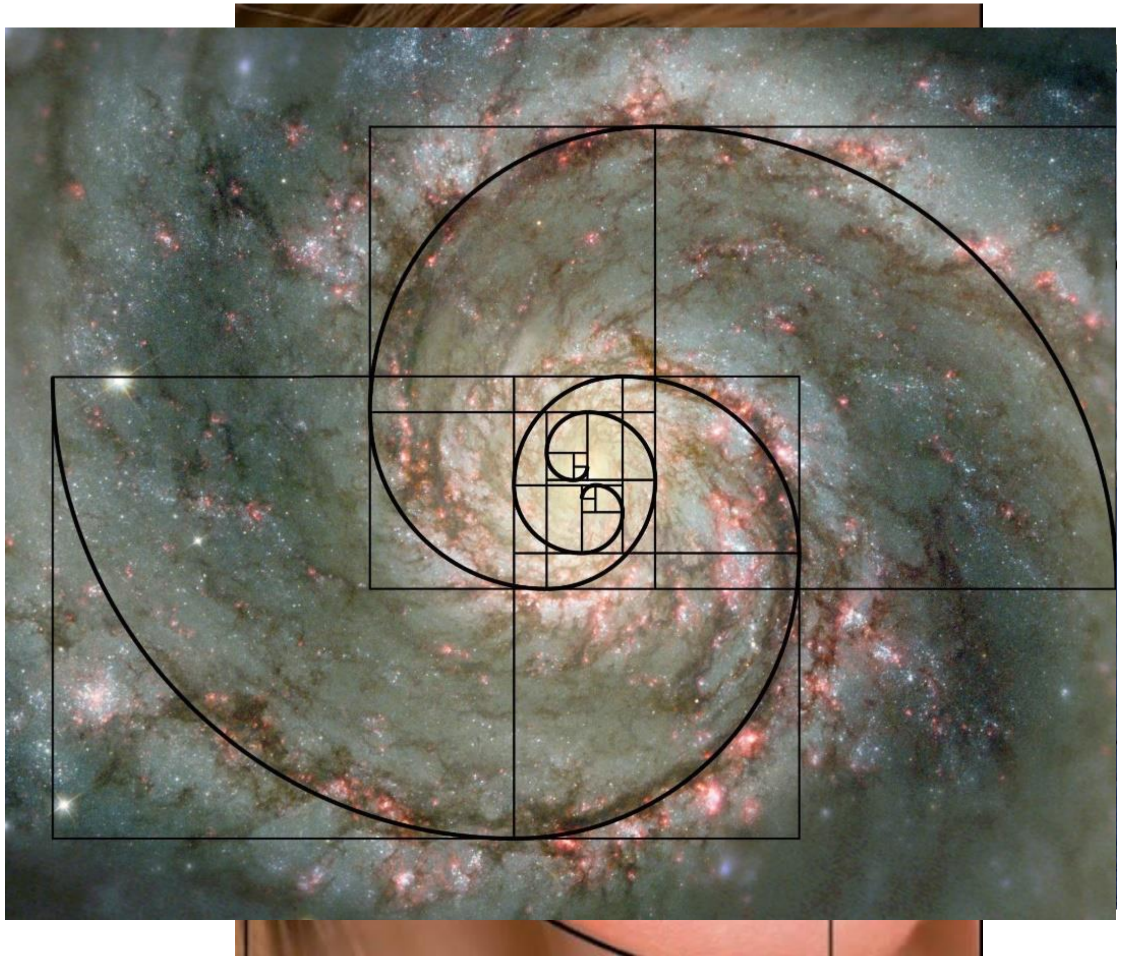
Označimo s F_n broj parova zečeva nakon n mjeseci.

Fibonaccijev niz

- Krećemo s jednim parom zečeva.
  Nakon mjesec dana, taj par još nije plodan, pa je $\boldsymbol{F_1 = 1}$
- Nakon dva mjeseca, još uvijek imamo samo jedan par, pa je $\boldsymbol{F_2 = 1}$.
- U trećem mjesecu prvi par dobiva novi par, pa je $F_3 = 2$.
- Općenito, nakon n mjeseci broj parova F_n je jednak broju parova iz prošlog mjeseca F_{n-1} uvećan za broj parova koje smo imali prije dva mjeseca (plodni parovi), F_{n-2}.

$$\boldsymbol{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$$





Fibonaccijeva spirala zapravo aproksimira logaritamsku spiralu, koja se često pojavljuje u prirodi. **(link)**

Rekurzija

Rekurzivno modeliranje je postupak kojim danas mnoge probleme rješavamo zapisivanjem pomoću rekurzije.

Mnogi kombinatorni problemi (problemi prebrajanja) puno se lakše i brže rješavaju rekurzivnim postupcima.

Rekurzivne strukture osnova su mnogih programskih jezika poput ProLoga, Haskella, Scheme, itd.

Funkcijski i logički programski jezici (za razliku od imperativnih programskih jezika poput C++ ili Pythona)

Opći član niza

Drugi način zadavanja niza jest zadavanje formule kojom se neposredno računa proizvoljni član u nizu, a_n.

Promotrimo niz:

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

Rekurzivni zapis:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1}$$
$$a_1 = 2$$

Opći član niza:

$$a_n = 2^n$$

Opći član niza

Formulu za opći član niza nije uvijek jednostavno prepoznati.

Fibonaccijev niz:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$$

Rekurzivni zapis:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1$$

Opći član niza:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Opći član niza

Formula za opći član niza se iz rekurzije dokazuje postupkom koji nazivamo ***matematička indukcija***.

Matematička indukcija se provodi u tri koraka:

1. dokažemo da je formula za opći član točna za bazu rekurzije
2. pretpostavimo da formula za opći član vrijedi za n-ti član niza, tj. za a_n
3. dokažemo da uz tu pretpostavku formula za opći član niza vrijedi i za slijedeći član u nizu, a_{n+1}

Monotonost niza

Za niz kažemo da je **rastući**, ako je svaki slijedeći član veći ili jednak prethodnom:

$$a_n \geq a_{n-1}, \qquad za\ svaki\ n \geq 2$$

Niz je **strogo rastući**, ako je nejednakost stroga:

$$a_n > a_{n-1}, \qquad za\ svaki\ n \geq 2$$

Za niz kažemo da je **padajući**, ako je svaki slijedeći član manji ili jednak prethodnom:

$$a_n \leq a_{n-1}, \qquad za\ svaki\ n \geq 2$$

Niz je **strogo padajući**, ako je nejednakost stroga:

$$a_n < a_{n-1}, \qquad za\ svaki\ n \geq 2$$

Monotonost niza

Za niz kažemo da je **(strogo) monoton**, ako je (strogo) rastući ili (strogo) padajući.

Za niz kažemo da je **stacionaran** ako su mu svi članovi jednaki, tj ako za svaki $n \geq 2$ vrijedi:

$$a_n = a_{n-1}$$

Za niz kažemo da je **alternirajući**, ako su mu svaka dva susjedna člana suprotnog predznaka:

$$a_n \cdot a_{n-1} < 0, \qquad za\ svaki\ n \geq 2$$

Monotonost niza

Kakvi su slijedeći nizovi?

a) $10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4}, \dots$ strogo padajući, strogo monoton

b) $1, 1, 3, 3, 5, 5 \dots$ rastući, monoton

c) $1, 4, 3, 6, 5, 8 \dots$ niti jedno od navedenih svojstava

d) $3, -2, 3, -3, 3, -4 \dots$ alternirajući

e) $-2, -2, -2, -2, \dots$ stacionaran, rastući, padajući, monoton

f) $-8, -2, 4, 10, \dots$ strogo rastući, strogo monoton

Monotonost niza

Dokažite da je niz zadan općom formulom $a_n = n^2 - n$ strogo rastući.

$$a_n > a_{n-1} \quad za\ svaki\ n \geq 2$$

$$n^2 - n > (n-1)^2 - (n-1)$$

$$\cancel{n^2} - \cancel{n} > \cancel{n^2} - 2n + 1 - \cancel{n} + 1$$

$$2n > 2$$

$$n > 1$$

Aritmetički niz

Aritmetički niz je niz u kojemu je razlika između svaka dva susjedna člana konstantna.

Rekurzivni opis:

razlika aritmetičkog niza

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_1 \in \mathbb{R}$$

Opći član:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Aritmetički niz

Aritmetički niz je dobio ime po slijedećem svojstvu: svaki član niza je aritmetička sredina susjedna dva člana.

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2\,a_1 + (n-1)d)$$

Aritmetički niz

Odredite peti član i sumu prvih deset članova aritmetičkog niza kojemu je prvi član $a_1 = -10$, a drugi član $a_2 = -7$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$-7 = -10 + d$$

$$d = 3$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_5 = -10 + 4 \cdot 3$$

$$a_5 = 2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2\,a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{10} = 5 \cdot (2 \cdot (-10) + 9 \cdot 3)$$

$$S_{10} = 5 \cdot 7 = 35$$

Geometrijski niz

Geometrijski niz je niz u kojemu je kvocijent između svaka dva susjedna člana konstantan.

Rekurzivni opis:

kvocijent geometrijskog niza

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_1 \in \mathbb{R}$$

Opći član:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Geometrijski niz

Geometrijski niz je dobio ime po slijedećem svojstvu: svaki član niza je geometrijska sredina susjedna dva člana.

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Geometrijski niz

Odredite peti član i sumu prvih deset članova geometrijskog niza kojemu je prvi član $a_1 = 8$, a treći član $a_3 = 2$, pri čemu je kvocijent $q > 0$.

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$2 = 8 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_5 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$a_5 = \frac{1}{2}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$S_{10} = 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = \frac{1023}{64}$$

Hvala ☺