MATEMATIKA

Determinante

Determinante

Knjiga „*Matematika za IT*”

- Poglavlje „Determinante”, str. 148. – 153.

Definicija determinante

Determinanta je broj (skalar) koji se definira za **kvadratne** matrice.

Oznaka: $\det(A)\,,\det A\,,|A|$

Za matrice veličine 1×1, tj. za $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_1}$:

$$A = [a] \qquad \Rightarrow \qquad \det A = |a| = a$$

Determinanta matrice s jednim elementom je upravo taj element.

Definicija determinante

Za matrice veličine 2×2, tj. za $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_2}$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Primjeri:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) = 6 + 2 = 8$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 12 - 12 = 0$$

Definicija determinante

Za matrice veličine 3×3, tj. za $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_3}$ koristimo **Sarrusovo** pravilo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

zbroj umnožaka na glavnim dijagonalama

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = (a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h)$$

$$-(c \cdot e \cdot g + a \cdot f \cdot h + b \cdot d \cdot i)$$

zbroj umnožaka na sporednim dijagonalama

Definicija determinante

Izračunajte vrijednost determinante slijedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = (2+0+2) - (12+0+0) = -8$$

Laplaceov razvoj

Za matrice veličine $n \times n$, tj. za $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_n}$ koristimo **Laplaceov razvoj** determinante.

Laplaceov razvoj determinante se provodi po nekom retku ili stupcu determinante, prema formuli:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot |A_{ij}| \quad \text{(razvoj po } i\text{-tom retku)}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot |A_{ij}| \quad \text{(razvoj po } j\text{-tom stupcu)}$$

Laplaceov razvoj

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot |A_{ij}|$$

U danoj formuli $|A_{ij}|$ predstavlja determinantu koju dobijemo kada iz determinante $|A|$ izbacimo i-ti redak i j-ti stupac.

$$|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pomoću Laplaceovog razvoja izračunajte vrijednost determinante slijedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \boxed{2} \\ -1 & 2 & \boxed{0} \\ 3 & -1 & \boxed{1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ -1 & 2 & \cancel{0} \\ 3 & -1 & \cancel{1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{2} \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 3 & -1 & \cancel{1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{2} \\ -1 & 2 & \cancel{0} \\ \cancel{3} & \cancel{-1} & \cancel{1} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (1 - 6) \ -0 \ +(2 + 0) \ = -8$$

Pomoću Laplaceovog razvoja izračunajte vrijednost determinante slijedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-1)^{3+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (-6 + 0 - 2) - (-2 + 0 - 12) = 6$$

Svojstva determinanti

1) Determinanta kojoj su svi elementi u nekom retku ili stupcu jednaki nuli, ima vrijednost nula.

2) Determinanta koja ima dva ista ili proporcionalna reda / stupca, ima vrijednost nula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Svojstva determinanti

3) Determinanta gornje trokutaste i donje trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-2) \cdot 3 = -24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 12$$

Svojstva determinanti

4) Ukoliko u determinanti zamijenimo dva retka / stupca, determinanta mijenja predznak.

5) Determinanta ne mijenja vrijednost, ukoliko iz **jednog retka ili stupca** izlučimo neku vrijednost.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \neq 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 27 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Svojstva determinanti

6) Ukoliko u determinanti neki redak (stupac) pomnožimo brojem (koji nije nula), i dodamo ga drugom retku, determinanta ne mijenja vrijednost.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-2) \; + = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \cdot 4 \; + = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 9$$

Svojstva determinanti

7) Za kvadratne matrice $A, B \in M_n$ vrijedi:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Odredite vrijednost determinante $\det X, X \in M_2$ ako vrijedi $A \cdot X = B$, te je poznato $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A \cdot X = B \quad |\det$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det(A \cdot X) = \det B$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$\det(A) \cdot \det(X) = \det B \qquad (-2) \cdot \det(X) = 7 \qquad \det(X) = -\frac{7}{2}$$

Svojstva determinanti

8) Za regularne matrice $A \in M_n$ vrijedi:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Odredite $\det(A^{-1})$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$\det(A) = 9$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{9}$$

Izračunali smo koristeći svojstva determinante.

Svojstva determinanti

9) Transponiranje kvadratne matrice ne mijenja vrijednost pripadne determinante:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -5$$

Inverz matrice

Osim pomoću Gaussove metode, inverz matrice se može računati i uz pomoć determinanti (*Cramerovo pravilo*).

Neka je *A* regularna matrica. Inverz je dan formulom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left[A_{ij}\right]^T,$$

pri čemu je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, gdje je M_{ij} determinanta matrice koja nastaje iz matrice *A* uklanjanjem *i*-tog retka i *j*-tog stupca.

Inverz matrice

Za matrice $A \in M_2$, postupak je vrlo jednostavan:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Inverz matrice

Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left[A_{ij}\right]^T$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Odredimo elemente matrice $[A_{ij}]$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$[A_{ij}]$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{ij}]^T$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverz matrice

Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cramerovo pravilo za sustave

Cramerovo pravilo se koristi i za rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

Omogućava nam rješavanje sustava pomoću determinanti.

Pomoću Cramerovog pravila možemo rješavati **isključivo kvadratne linearne sustave** - n jednadžbi s n nepoznanica.

Moguće je odrediti isključivo **jedinstvena rješenja**.

Cramerovo pravilo ne razlikuje kontradiktorne sustave od sustava s parametarskim rješenjima.

Cramerovom metodom riješite sustav:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & 2y & & & = & 4 \\ & & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

Prvo izračunamo determinantu sustava D, u koju ulaze koeficijenti koji se nalaze uz nepoznanice:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{matrix} = (-12 + 0 + 2) - (0 + 0 + 3) = -13$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
2x & + & y & + & z & = & \boxed{4} \\
x & - & 2y & & & = & 4 \\
 & & 2y & + & 3z & = & 1
\end{array}
$$

Potom formiramo determinantu D_x, tako da stupac u kojem se nalaze koeficijenti uz x zamijenimo s stupcem desne strane sustava:

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix} = (-24 + 0 + 8) - (-2 + 0 + 12) = -26$$

Sada je: $\boxed{x = \dfrac{D_x}{D}} = \dfrac{-26}{-13} = 2$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & \boxed{4} \\ x & - & 2y & & & = & 4 \\ & & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

Na isti način odredimo vrijednosti druge dvije nepoznanice:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{4} & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{matrix} = (24 + 0 + 1) - (0 + 0 + 12) = 13$$

$$\boxed{y = \frac{D_y}{D}} = \frac{13}{-13} = -1$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & 2y & & & = & 4 \\ & & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

Na isti način odredimo vrijednosti druge dvije nepoznanice:

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{matrix} = (-4 + 0 + 8) - (0 + 16 + 1) = -13$$

$$\boxed{z = \frac{D_z}{D}} = \frac{-13}{-13} = 1$$

Hvala ☺