MATEMATIČKA ANALIZA

Ispit – grupa 1
OGLEDNI PRIMJER ISPITA

Bodovi i vrijeme pisanja po ishodu:

Ishod	I1	I2	I3	I4	UKUPNO
Bodovi	20	20	20	20	80
Vrijeme pisanja	45 minuta	45 minuta	45 minuta	45 minuta	180 minuta

UPUTE:

- Na ispitu je dozvoljeno korištenje kalkulatora.
- Na papiru koji ste dobili od čuvar(ic)a, napišite svoje ime i prezime te grupu (Grupa 1). Odgovore i postupak pišite na dodatni papir redom kojim su postavljeni zadaci, uz naznaku ishoda i zadatka na koji odgovarate. Ako pišete na više papira, obavezno se potpišite na sve papire! **Nepotpisani papiri / ispiti se neće pregledati!**

Ishod učenja 1 – 20 bodova / 45 minuta

1. **[I1_M, 3 boda]** Riješite limes bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}.$$

2. **[I1_M, 3 boda]** Riješite limes bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{2x^2-4x}.$$

3. **[I1_M, 2 boda]** Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = \log\pi + \frac{1}{x^2} + \sin x - e^3$.

4. **[I1_M, 2 boda]** Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = (e^x + 1)\cdot x^2$.

5. **[I1_M, 3 boda]** Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$.

6. **[I1_Ž, 3 boda]** Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = \ln\left(\sqrt{x} + \sin x\right)$.

7. **[I1_Ž, 4 boda]** Koristeći logaritamsko deriviranje, derivirajte funkciju:

$$f(x) = (2x+1)^{3x-1}.$$

Ishod učenja 2 – 20 bodova / 45 minuta

1. **[I2_Ž, 4 boda]** Zadana je funkcija $f(x) = \cos x$. Odredite normalu na tu krivulju u točki $T\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Zapišite jednadžbu normale pomoću brojeva u decimalnom zapisu zaokruženih na dva decimalna mjesta. Skicirajte graf zadane funkcije i traženu normalu!

2. **[I2_M, 4 boda]** Primjenom L'Hospitalovog pravila izračunajte:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\ln x)}{x^2 - x}.$$

3. **[I2_M, 8 bodova]** Ispitajte tok i skicirajte graf sljedeće funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1},$$

ako je

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

4. **[I2_Ž, 4 boda]** Zadana je funkcija potražnje u odnosu na cijenu:

$$q(p) = p^3 - 40\,p^2 + 500\,p.$$

Na kojoj razini cijena je prosječna potražnja minimalna i koliko ona iznosi?

Ishod učenja 3 – 20 bodova / 45 minuta

1. **[I3_M, 4 boda]** Riješite integral:
$$\int \left(1+3^x\right)^2 dx.$$

2. **[I3_M, 4 boda]** Metodom supstitucije riješite integral:
$$\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx.$$

3. **[I3_Ž, 4 boda]** Riješite integral:
$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx.$$

4. **[I3_Ž, 4 boda]** Pomoću parcijalne integracije riješite integral:
$$\int \sin x \cdot \cos 2x \, dx.$$

5. **[I3_Ž, 4 boda]** Riješite određeni integral:
$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} \, dx.$$

Ishod učenja 4 – 20 bodova / 45 minuta

1. **[I4_M, 7 bodova]** Izračunajte površinu omeđenu krivuljom $y = e^x$ i pravcem koji tu krivulju siječe u točkama $T_1(0,1)$ i $T_2(1,e)$. Obavezna skica!

2. **[I4_Ž, 7 bodova]** Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe
$$2\sqrt{x}\, y\, y' - 1 = 0$$
s početnim uvjetom $y(0) = 2$, ako je $y > 0$.

3. **[I4_M, 6 bodova]** Odredite funkciju potražnje u ovisnosti o cijeni, $q(p)$, ako joj je koeficijent elastičnosti jednak $E_{q,p} = -\frac{1}{2}$ i vrijedi $q(1) = 3$.

Formule

Linearna funkcija

$$y = k \cdot (x - x_1) = k \cdot x + l$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Kvadratna funkcija

Nultočke: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Tjeme: $T = \left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Algebarski izrazi

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

Potencije

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n}, \qquad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Domena funkcije

$$\frac{g(x)}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq 0$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 0$$

$$\log_a f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$$

Neodređeni oblici limesa

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty$$

Određeni oblici limesa

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{0}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty, \qquad \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\ln 0 = -\infty, \qquad \ln \infty = \infty$$

$$e^\infty = \infty, \qquad e^{-\infty} = 0$$

Postupci rješavanja limesa

- limes oblika $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: dijeljenje brojnika i nazivnika s najvećom potencijom
- limes oblika $\left[\frac{0}{0}\right]$: faktorizacija polinoma
- limes oblika $\left[\frac{0}{0}\right]$: racionalizacija korijena
- limes oblika $[\infty - \infty]$: racionalizacija korijena ili svođenje na zajednički nazivnik

L'Hospitalovo pravilo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{za oblike } \left[\tfrac{0}{0}\right] \text{ ili } \left[\tfrac{\infty}{\infty}\right]$$

- oblik $[0 \cdot \infty]$ se transformira u $\left[\frac{0}{0}\right]$ ili $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ seljenjem dijela izraza u nazivnik
- oblik $[\infty - \infty]$ se transformira $\left[\frac{0}{0}\right]$ ili $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ oduzimanjem razlomaka ili racionalizacijom iracionalnih izraza

Tablične derivacije

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Pravila deriviranja

- $(A \cdot f(x))' = A \cdot f'(x)$
- $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$
- $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

Tok funkcije

1. Domena funkcije
2. Nultočke funkcije, $f(x) = 0$.
3. Vertikalne asimptote: pravac $x = a$ je VA ako je $\lim\limits_{x \to a} = \pm\infty$.
4. Horizontalne asimptote: pravac $y = b$ je HA ako je $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = b$.
5. Monotonost (pad i rast) funkicije: funkcija pada u točki x ako je $f'(x) < 0$; funkcija raste u točki x ako je $f'(x) > 0$.
6. Lokalni ekstremi: funkcija u točki x ima lokalni ekstrem ako prva derivacija u toj točki mijenja predznak.
7. Zakrivljenost (konveksnost i konkavnost) funkcije: funkcija je konkavna u točki x ako je $f''(x) < 0$; funkcija je konveksna u točki x ako je $f''(x) > 0$.
8. Točke infleksije: funkcija u točki x ima točku infleksije ako druga derivacija u toj točki mijenja predznak.

Tangenta i normala

Tangenta na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $T(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Normala na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $T(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Ekonomske funkcije

Osnovne ekonomske veličine (poput količine, cijene, prihoda...) nisu negativne.
Za ekonomsku funkciju $f(x)$ definiramo:

- *Prosječnu funkciju*: $Af(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
- *Graničnu funkciju*: $Mf(x) = f'(x)$.
- *Elastičnost* u odnosu na varijablu x: $E_{f,x} = \dfrac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$.

  Interpretacija koeficijenta elastičnosti: za danu vrijednost varijable x, kada varijabla raste za 1%, tada vrijednost funkcije f raste / pada za približno $|E_{f,x}|\%$.

Tablični integrali

- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq 1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{ctg} x + c$

Pravila integriranja

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Metoda supstitucije

$$\int f\big(g(x)\big)\,dx = \left| \begin{array}{c} g(x) = t \\ g'(x)\,dx = dt \end{array} \right| = \int f(t)\,dt$$

Metoda parcijalne integracije

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

Površina između krivulja

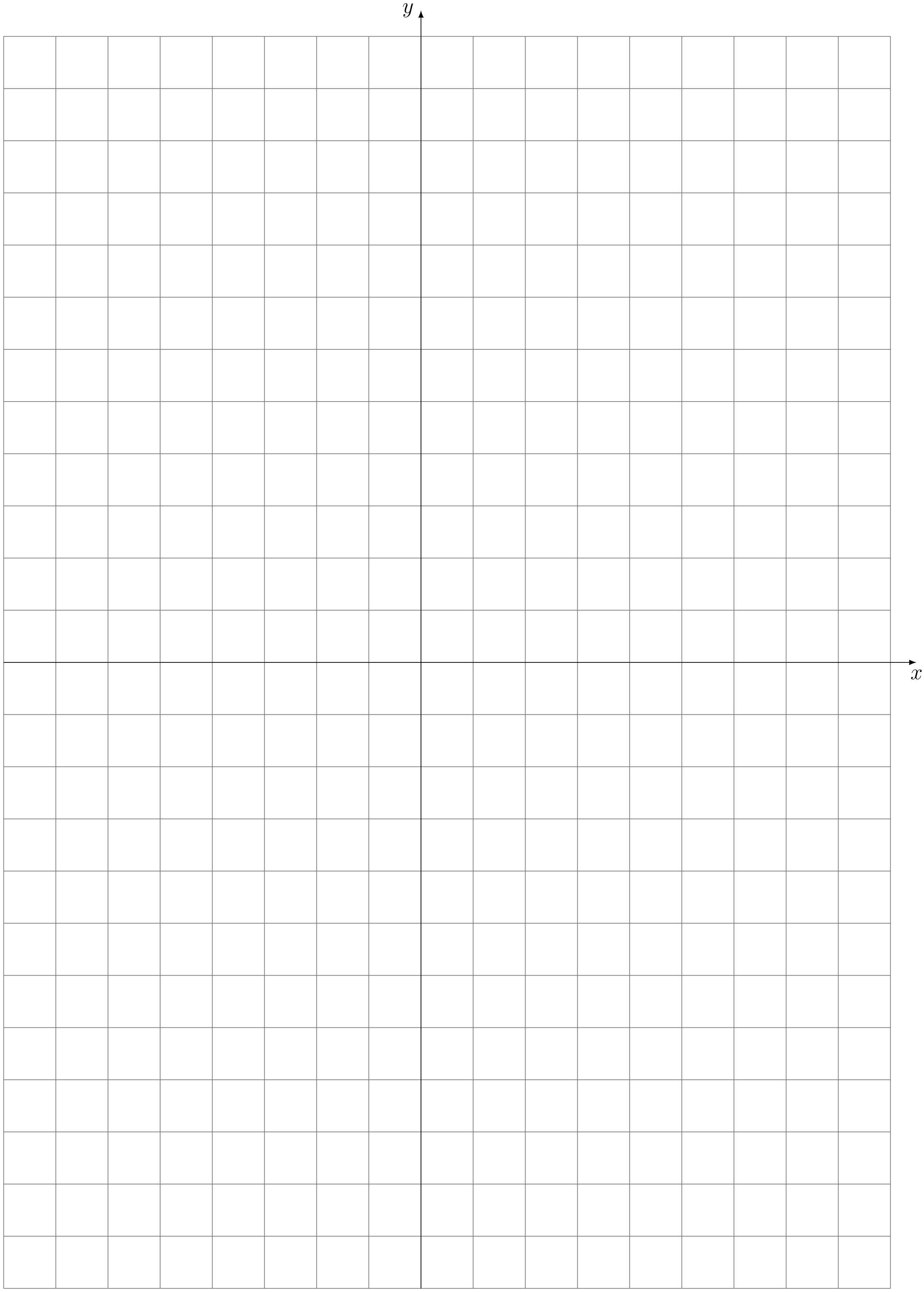
$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx,$$

gdje je $f(x)$ "gornja", a $g(x)$ "donja" funkcija.

Separabilne diferencijalne jednadžbe

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

1. Derivaciju zapišemo pomoću diferencijala: $y' = \frac{dy}{dx}$.
2. Separiramo diferencijalnu jednadžbu: x grupiramo uz dx, a y uz dy.
3. Integriramo jednadžbu.
4. Izrazimo y i zapišemo opće rješenje jednadžbe.
5. U opće rješenje uvrstimo početni uvjet i odredimo vrijednost konstante c.
6. Uvrstimo konstantu c u opće rješenje i zapišemo partikularno rješenje jednadžbe.


y
x