4.1 Diskretne slučajne varijable

Slučajna varijabla

Preslikavanje $X : \Omega \mapsto S$ je **diskretna slučajna varijabla** ako je za svaki $x_i \in S$ skup $A_i := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$ događaj. Označimo $p_i := P(A_i) = P(X = x_i)$. Za ove brojeve je $p_i > 0$ i $\sum p_i = 1$. **Zakon razdiobe** slučajne varijable X sastoji se od područja vrijednosti koje ona poprima i odgovarajućih vjerojatnosti. Pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Primjer 4.1.

Bacamo tri igraće kocke. Neka slučajna varijabla X bilježi broj šestica. Odredite razdiobu te slučajne varijable.

Primjer 4.2.

U kutiji se nalazi 7 kuglica od kojih su 3 bijele. Slučajno odabiremo 3 kuglice te neka slučajna varijabla bilježi broj izvučenih bijelih kuglica. Odredite razdiobu slučajne varijable X.

Nezavisne slučajne varijable - definicija i osnovno svojstvo

Slučajne varijable $X, Y : \Omega \mapsto S$ su **nezavisne** ako za sve $x_i, y_j \in S$ vrijedi

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

Tada vrijedi općenitije, za sve $A, B \subset S$

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Nezavisnost niza slučajnih varijabli

Slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definirane na istom vjerojatnosnom prostoru su nezavisne, ako za sve $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S$ vrijedi

$$\begin{aligned} &P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) \\ &\qquad = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n). \end{aligned}$$

Primjer 4.3

Bacamo novčić sve dok se ne pojavi pismo te neka slučajna varijabla X označava potreban broj bacanja. Odredite zakon razdiobe slučajne varijable X.

Funkcije diskretnih slučajnih varijabli

Neka je X diskretna slučajna varijabla s poznatim zakonom razdiobe, $\phi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ zadana funkcija i $Y = \phi(X)$. Tada je

$$Y \sim \begin{pmatrix} \phi(x_1) & \phi(x_2) & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots \end{pmatrix}$$

zakon razdiobe varijable Y. Njega dovodimo na reducirani oblik

$$Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots \\ q_1 & q_2 & \ldots \end{pmatrix}$$

gdje su $y_1, y_2, \ldots$ sve različite vrijednosti iz skupa $\{\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots\}$, pri čemu se odgovarajuće vjerojatnosti zbrajaju.

Primjer 4.4.

Slučajna varijabla X ima zakon razdiobe

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Odredite zakon razdiobe varijable $Y = X^4$.

Primjer 4.5.

Nezavisne slučajne varijable X_1 i X_2 imaju isti zakon razdiobe

$$X_1, X_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Odredite zakon razdiobe slučajnih varijabli $Y = X_1 + X_2$ i $Z = X_1 X_2$.

4.2. Karakteristične funkcije diskretnih varijabli

Očekivanje slučajne varijable

Neka slučajna varijabla X ima zakon razdiobe:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Očekivanje slučajne varijable X definirano je kao zbroj

$$E(X) = \sum_i x_i p_i.$$

Često se očekivanje slučajne varijable označava i simbolima $\overline{x}$ ili m_X.

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

– očekivanje slučajne varijable ne mora biti jednako nekoj od mogućih realizacija te varijable

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 100 \\ 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

– očekivanje ne mora biti blisko niti realizaciji s najvećom vjerojatnosti

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & \dots & 3^{n-1} & \dots \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{27} & \dots & \frac{2}{3^n} & \dots \end{pmatrix}$$

– očekivanje ne mora postojati

Primjer 4.6.

U kutiji se nalazi pet kuglica od kojih su dvije bijele. Izvlačimo na sreću po jednu kuglicu, bez vraćanja, sve dok ne izvučemo bijelu kuglicu. Neka X označava pokušaj u kojemu je izvučena bijela kuglica. Izračunajte očekivanje slučajne varijable X.

Svojstva očekivanja

Teorem 4.1 *Neka su X i Y slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru. Očekivanje ima svojstvo linearnosti, za sve realne brojeve α i β vrijedi*

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

Ako su slučajne varijable X i Y nezavisne, onda vrijedi

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Primjer 4.7.

Zadana je slučajna varijabla $X \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ te neka je $Y = X^2$. Izračunajte $E(Y)$.

Očekivanje funkcije slučajne varijable možemo računati pomoću formule

$$E(\phi(X)) = \sum_i \phi(x_i)p_i,$$

tj. ne moramo slučajnu varijablu svoditi na reducirani oblik.

Disperzija slučajne varijable

Disperzija (rasipanje, varijanca) slučajne varijable X definira se formulom

$$D(X) = E\left[(X - E(X))^2\right].$$

Ovaj se izraz najčešće računa na sljedeći način:

$$D(X) = E(X^2) - m_X^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \left(\sum_i x_i p_i\right)^2, \quad (m_X = E(X))$$

Svojstva disperzije

Teorem 4.2 *Za slučajnu varijablu X i realni broj α vrijedi*

$$D(\alpha X) = \alpha^2 D(X).$$

Ako su slučajne varijable X i Y nezavisne, onda vrijedi

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Primjer 4.8.

Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju identičnu razdiobu s očekivanjem 2 i disperzijom 5. Kolika je disperzija slučajne varijable $2X + 3Y$? Koliko je očekivanje, a kolika disperzija slučajne varijable $3X - 3Y$?

Disperzija je uvijek pozitivna zato jer je

$$D(X) = E\left[(X - m_X)^2\right] = \sum_i (x_i - m_X)^2 p_i.$$

Disperzija je jednaka nuli samo ako je slučajna varijabla konstantna funkcija.

Veličinu $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$ nazivamo **standardna devijacija (odstupanje)** varijable X.

Primjer 4.9.

Zadane su nezavisne slučajne varijable

$$X \sim \begin{pmatrix} -10 & -5 & -2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte očekivanje slučajne varijable XY i disperziju slučajne varijable $2X - 3Y$.

Primjer 4.10.

Slučajno odabiremo dva broja iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, pri čemu isti broj možemo odabrati dva puta. Neka je X maksimalna vrijednost od ta dva na sreću odabrana broja. Odredite očekivanje od X.

Primjer 4.11.

Bacamo dva simetrična tetraedra kojima su na stranicama napisani brojevi od 1 do 4. Neka slučajna varijabla X označava umnožak brojeva na donjim stranama tetraedara na koje su oni pali. Odredite očekivanje i disperziju slučajne varijable X.