MATEMATIKA

Geometrija prostora

Geometrija prostora

Knjiga „*Matematika za IT*”

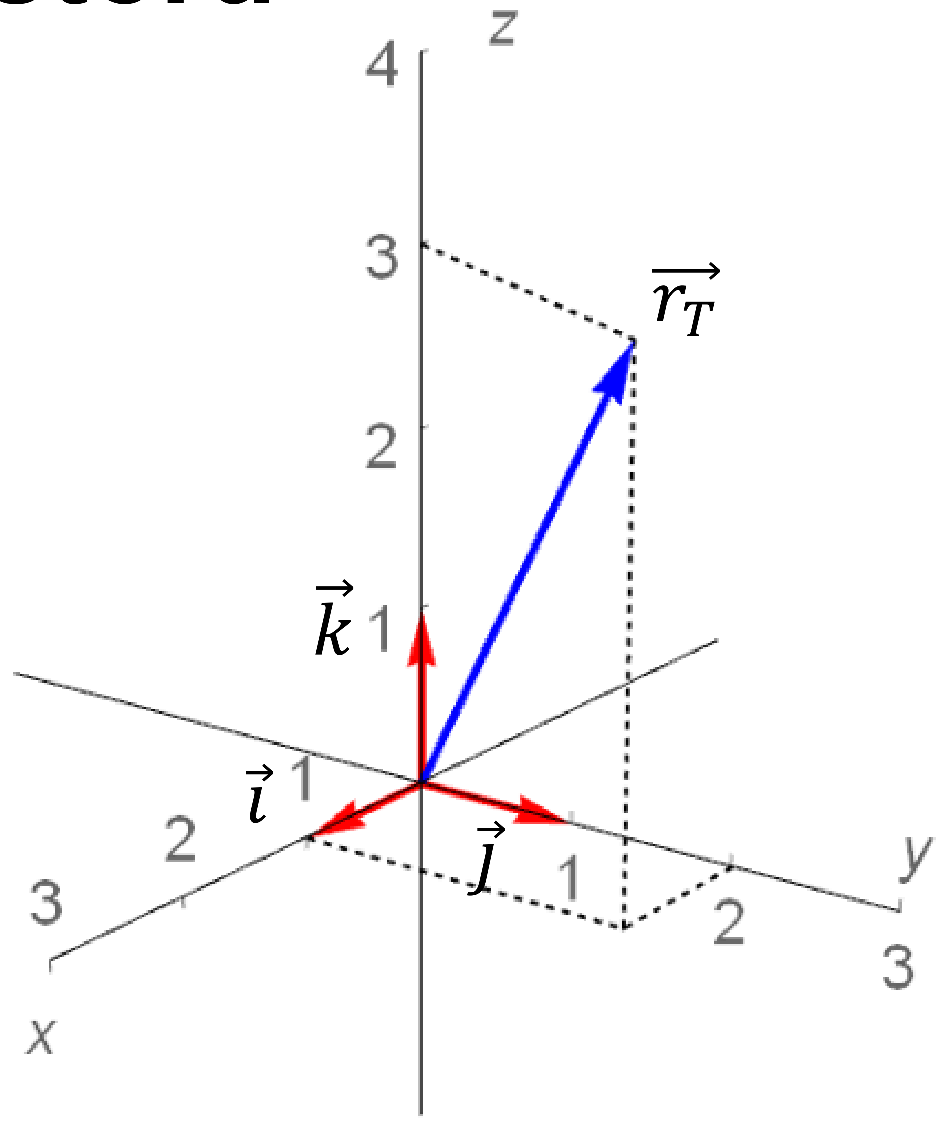
- Poglavlje „Geometrija prostora”, str. 196. – 211.

Točka u prostoru

Točka se u prostoru prikazuje pomoću **radij vektora.**

Radij vektor je vektor kojemu je početna točka u ishodištu, a završna točka u promatranoj točki $T(x, y, z)$.

$$\overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{OT} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



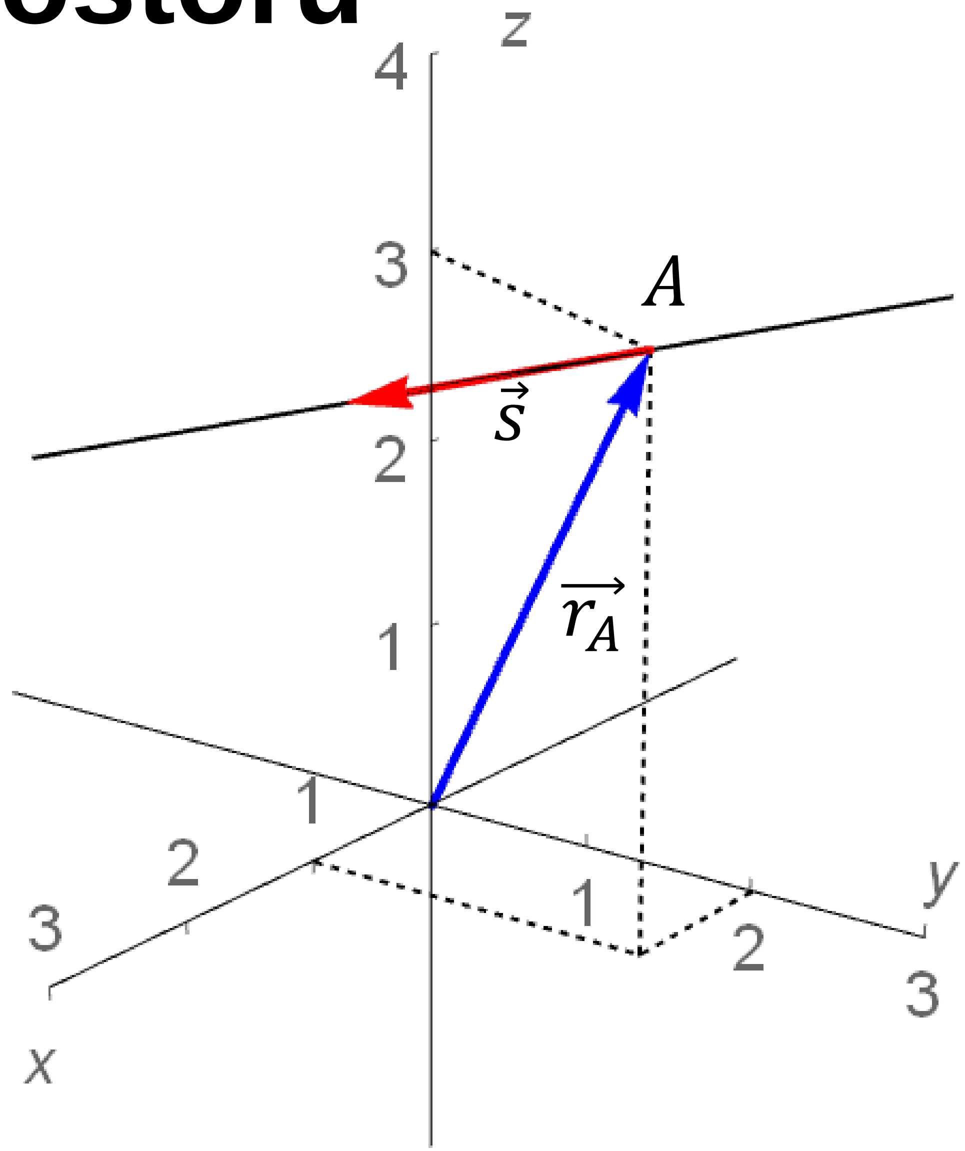
Pravac u prostoru

Pravac u prostoru prikazujemo pomoću radij vektora točaka na pravcu.

Vektorska jednadžba pravca u prostoru slična je jednadžbi pravca u ravnini:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{s}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

gdje je $\overrightarrow{r_A}$ radij vektor neke točke na pravcu, a $\vec{s}$ vektor smjera tog pravca.



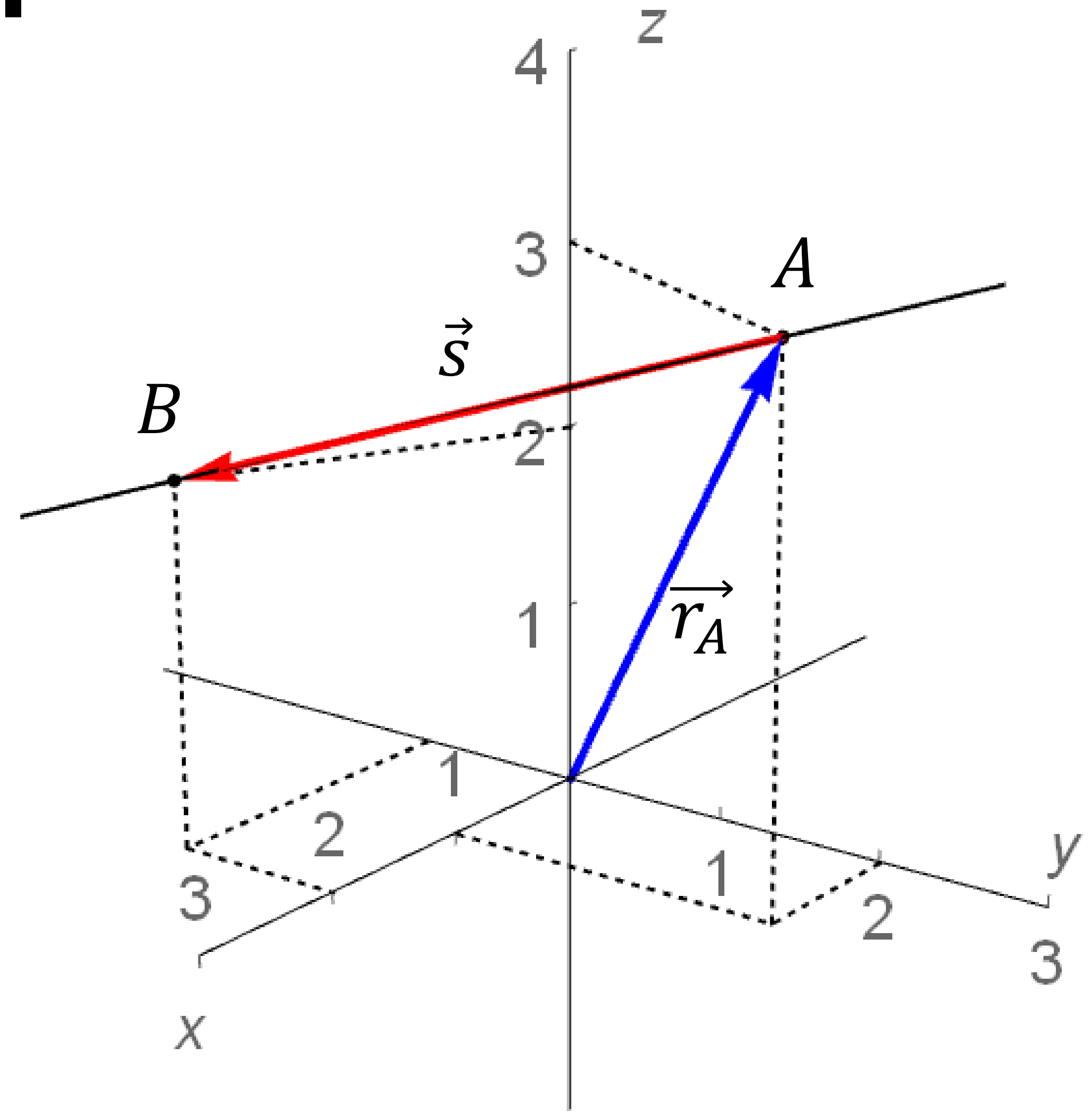
Pravac u prostoru

Odredite vektorsku jednadžbu pravca koji prolazi točkama $A(1,2,3)$ i $B(2,-1,2)$

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ -1-2 \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{s}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 2-3t \\ 3-t \end{bmatrix}$$



Pravac u prostoru

Osim u vektorskom obliku, jednadžba pravca u prostoru se može zapisati i u kanonskom obliku:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{x - x_A}}{\boldsymbol{s_x}} = \frac{\boldsymbol{y - y_A}}{\boldsymbol{s_y}} = \frac{\boldsymbol{z - z_A}}{\boldsymbol{s_z}}}$$

gdje je $A(x_A, y_A, z_A)$ točka na pravcu, a $\vec{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix}$ vektor smjera tog pravca.

Pravac u prostoru

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{x}}}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{y}}}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{z}}}}$$

Odredite kanonsku jednadžbu pravca $\vec{r}=\begin{bmatrix}-2\\3-t\\2t\end{bmatrix}$.

Točka na pravcu: $A(-2,3,0)$

Vektor smjera: $\vec{s}=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$

Kanonska jednadžba pravca: $\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{2}$

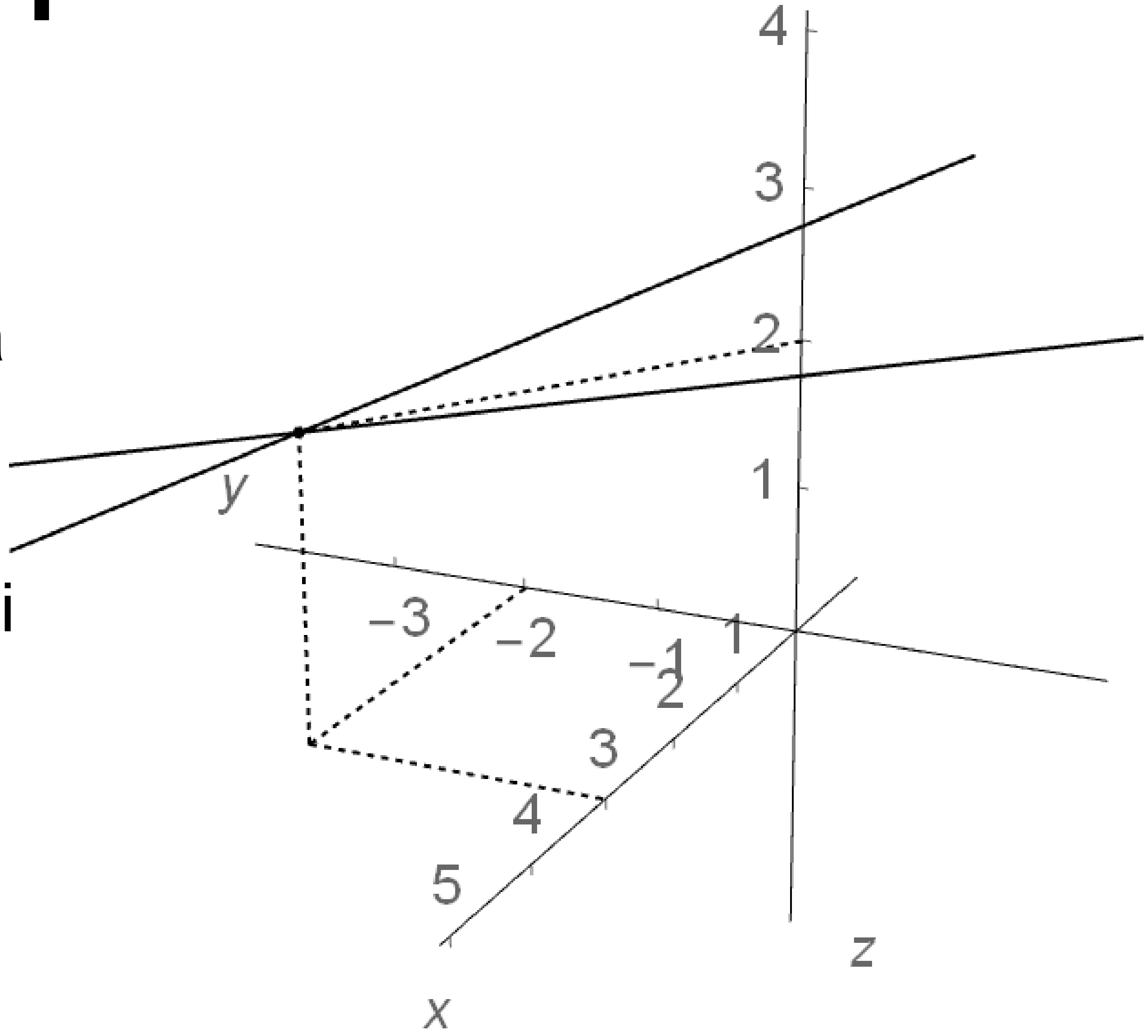
Pravac u prostoru

Dva pravca se sijeku ako prolaze kroz istu točku.

Presjecište određujemo tako da pravce izjednačimo po svim koordinatama.

Pravci se ne moraju sijeći za isti parametar, pa uvodimo novi parametar u za drugi pravac.

Rješenja moraju biti ista po svim koordinatama!



ALGEBRA

Pravac u prostoru

Sijeku li se pravci $\vec{r_1} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\vec{r_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2+2t \\ 4+t \end{bmatrix}$?

x ...	$1 - t = 3$	$t = -2$
y ...	$t = 2 + 2u$	$-2 = -2$
z ...	$2 = 4 + u$	$u = -2$

Da, presjecište je točka:

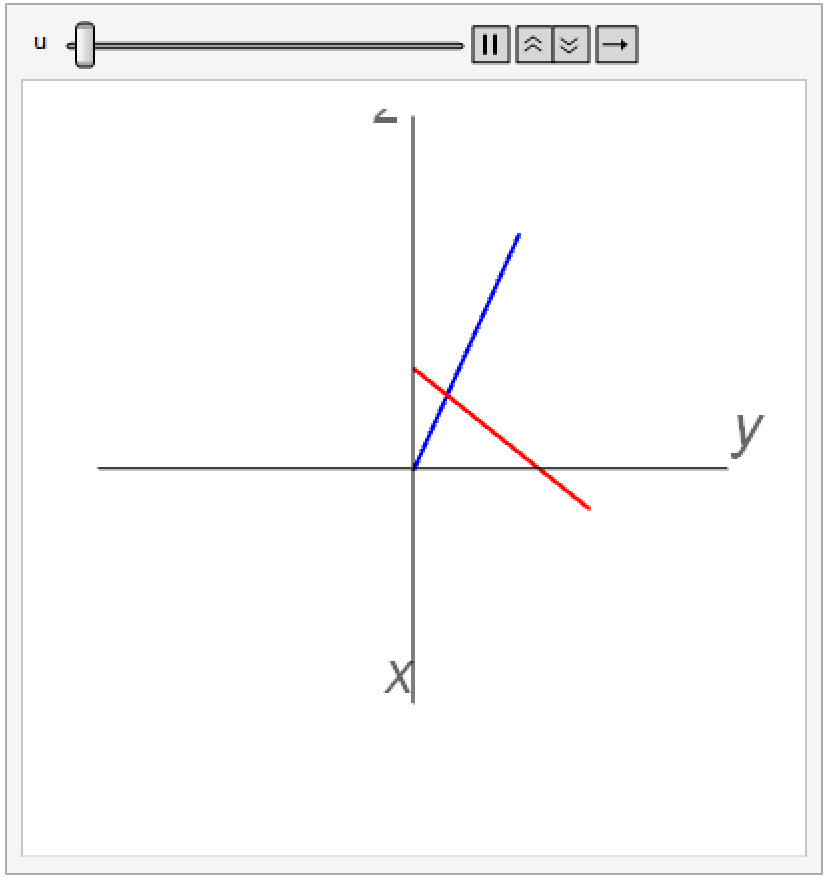
$$\vec{r_S} = \begin{bmatrix} 1-(-2) \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sijeku li se $\vec{r_1} = \begin{bmatrix} 3-4t \\ 2t \\ 2-3t \end{bmatrix}$ i $\vec{r_2} = \begin{bmatrix} -1-t \\ 1-t \\ 2-3t \end{bmatrix}$?

x ... $\quad 3-4t = -1-u \quad t = \frac{4}{3}$

y ... $\quad 2t = 1-u \quad t = \frac{1}{3}$

z ... $\quad 2-3t = 2-3u \quad t = u$



Ne postoji točka presjeka.

Pravci su **mimoilazni**.

Pravac u prostoru

Ukoliko pravci imaju jednake ili proporcionalne vektore smjera, kažemo sa su pravci **paralelni**.

$$\overrightarrow{s_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{s_2}$$

Ukoliko dva pravca imaju međusobno okomite vektore smjera, kažemo da su pravci **okomiti**.

Okomitost vektora ispitujemo pomoću skalarnog produkta:

$$\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 0$$

Pravci se ne moraju presijecati da bi bili međusobno okomiti.

Pravac u prostoru

Jesu li okomiti pravci $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}$ i $\frac{x+4}{-2}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z-2}{5}$?

$$\vec{s_1}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{s_2}=\begin{bmatrix}-2\\-4\\5\end{bmatrix}$$

$$\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+0\cdot 5\ =0$$

Zadani pravci međusobno su okomiti.

Pravac u prostoru

Jesu li paralelni pravci $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{3}$ i $\frac{x-4}{0}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+3}{-6}$?

$$\overrightarrow{s_1}=\begin{bmatrix}0\\-2\\3\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{s_2}=\begin{bmatrix}0\\4\\-6\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{s_2}=(-2)\cdot\overrightarrow{s_1}$$

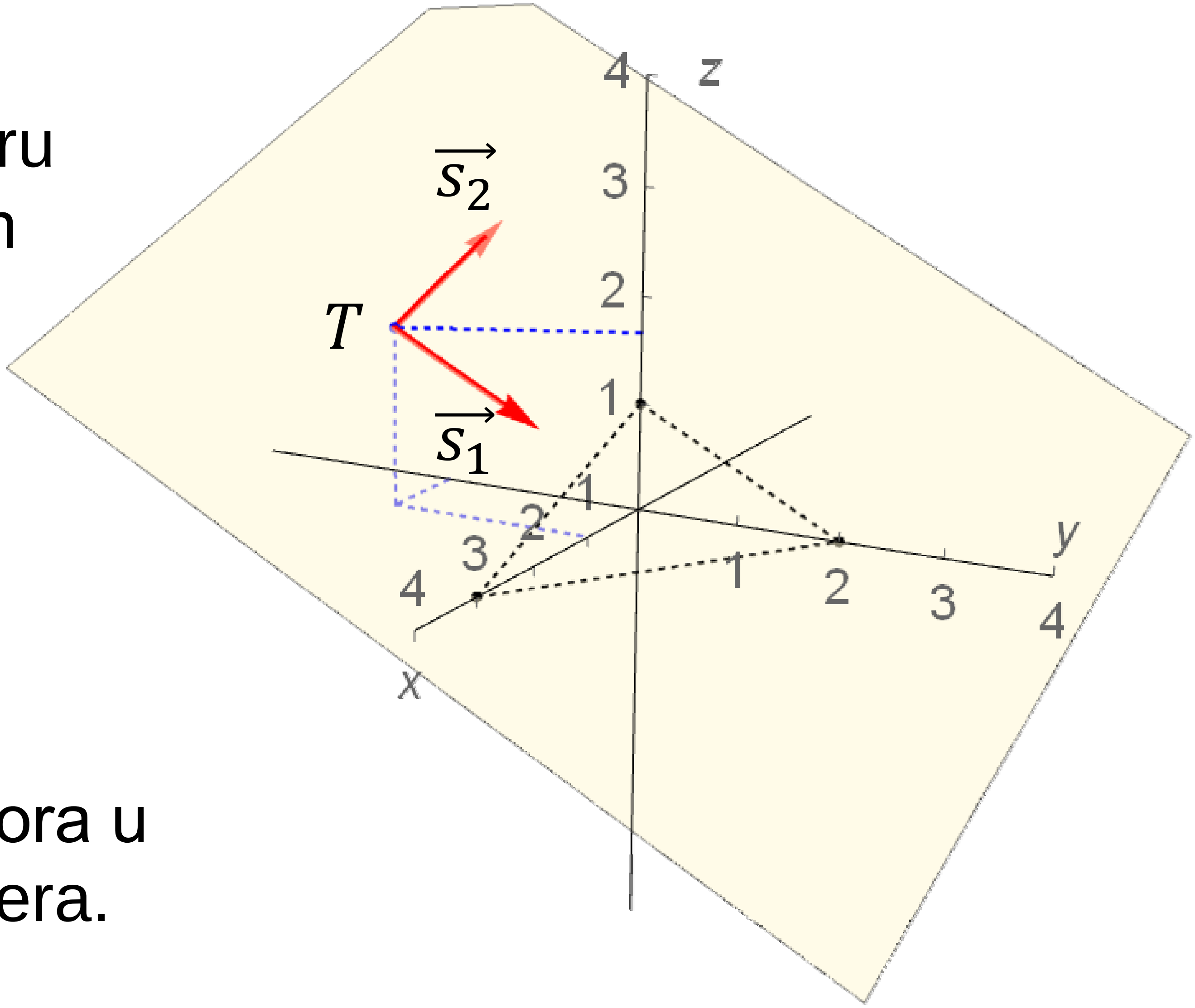
Zadani pravci imaju proporcionalne vektore smjera, što znači da su paralelni.

Ravnina u prostoru

Ravnina je ravna ploha u prostoru koja je određena jednom točkom kroz koju prolazi, $\overrightarrow{r_T}$, te s dva vektora smjera, $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$.

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_T} + u \cdot \overrightarrow{s_1} + v \cdot \overrightarrow{s_2}$$

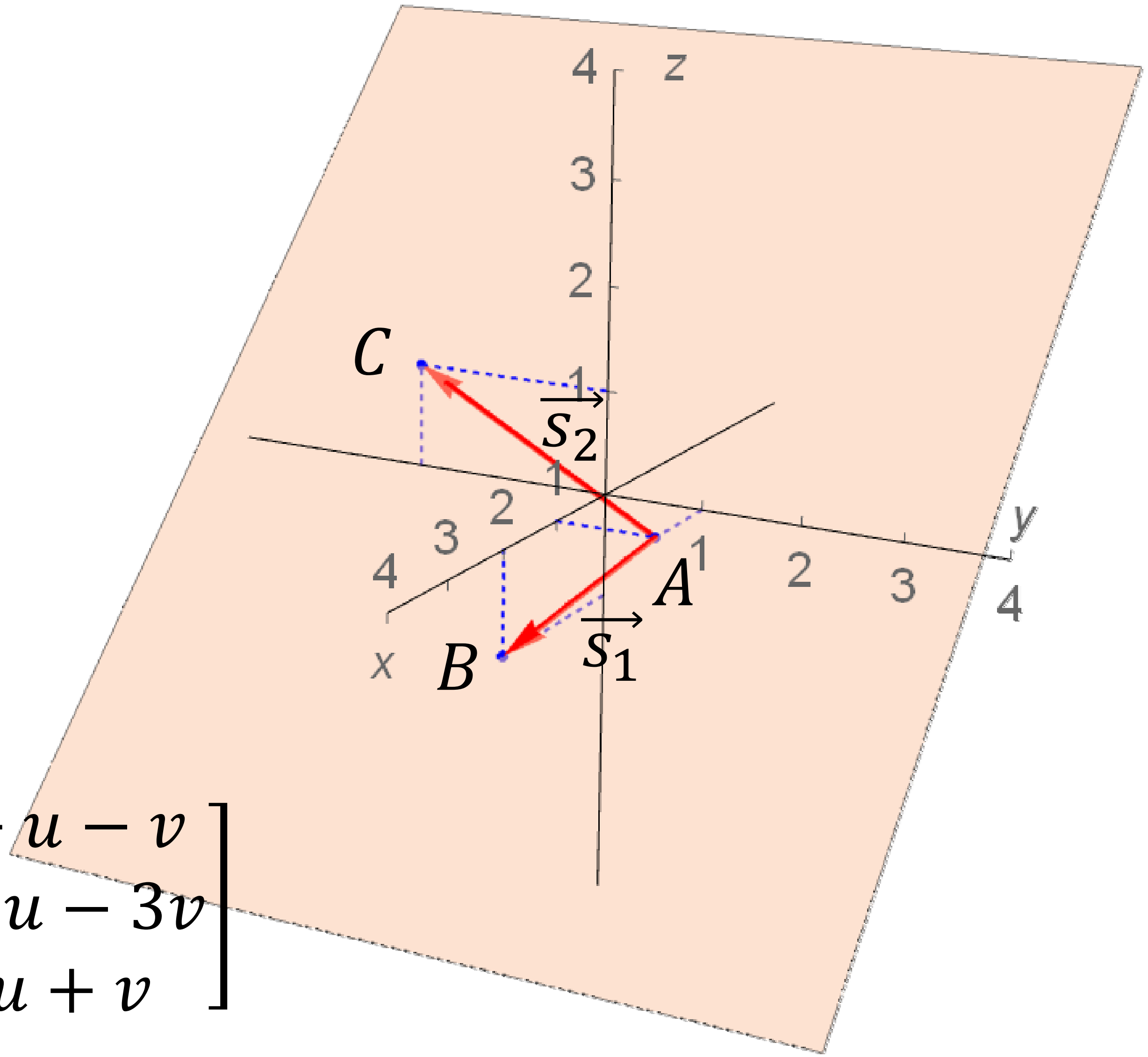
$$u, v \in \mathbb{R}$$



Postoji beskonačno mnogo vektora u ravnini koji mogu biti vektori smjera.

Ravnina u prostoru

Odredite vektorsku jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $A(1,1,0)$, $\mathrm{B}(2,0,-1)$ i $C(0,-2,1)$.



$$\overrightarrow{s_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{s_2} = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + u \cdot \overrightarrow{s_1} + v \cdot \overrightarrow{s_2}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u - v \\ 1 - u - 3v \\ -u + v \end{bmatrix}$$

Opća jednadžba ravnine

Pored vektorske jednadžbe ravnine, koristi se i opća jednadžba ravnine, koja je oblika:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Pokažimo kako iz opće jednadžbe ravnine možemo odrediti vektore smjera ravnine, te pripadnu vektorsku jednadžbu ravnine.

Opća jednadžba ravnine

Zadan je opća jednadžba ravnine $2x - y + z - 4 = 0$. Odredite vektore smjera te ravnine, te vektorsku jednadžbu ravnine.

Prvo odredimo tri točke u ravnini – najlakše je odrediti presjeke s koordinatnim osima:

x-os: $y = 0,\ z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A(2, 0, 0)$

y-os: $x = 0,\ z = 0 \quad \Rightarrow \quad -y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad B(0, -4, 0)$

z-os: $x = 0,\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C(0, 0, 4)$

Opća jednadžba ravnine

Zadan je opća jednadžba ravnine $2x - y + z - 4 = 0$. Odredite vektore smjera te ravnine, te vektorsku jednadžbu ravnine.

$$A(2,0,0) \qquad B(0,-4,0) \qquad C(0,0,4)$$

$$\vec{s_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{s_2} = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{r_A} + u \cdot \vec{s_1} + v \cdot \vec{s_2}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2u - 2v \\ -4u \\ 4v \end{bmatrix}$$

Normala ravnine

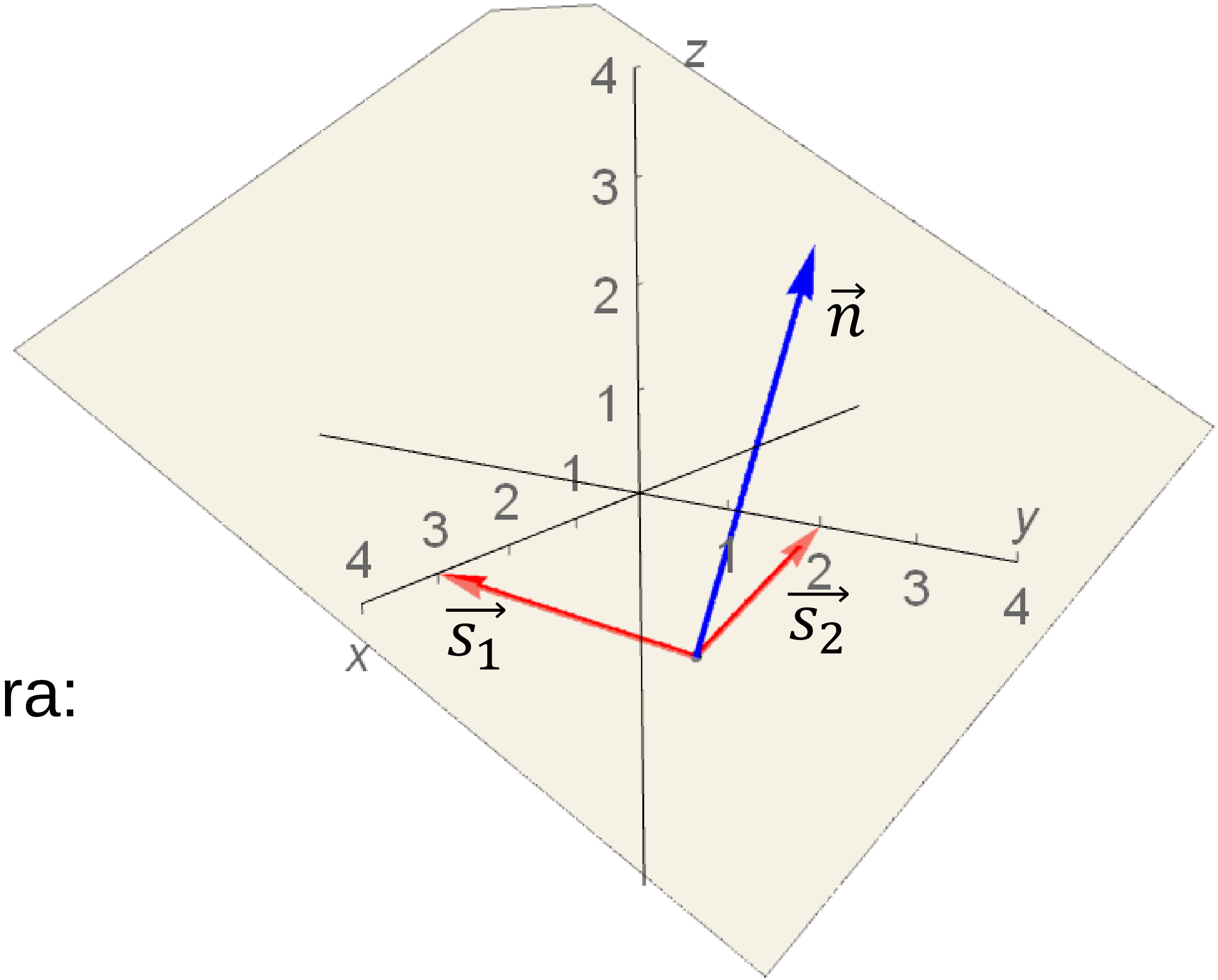
Normala ravnine je vektor

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

koji je okomit na tu ravninu,

Normalu možemo odrediti kao vektorski produkt vektora smjera:

$$\vec{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}$$



Normala ravnine

Normala ravnine vezana je uz opću jednadžbu ravnine.

Opća jednadžba ravnine koja prolazi točkom $T(x_0, y_0, z_0)$

i ima normalu $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ dana je jednadžbom:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

Odredite opći jednadžbu ravnine zadane s $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2-u-v \\ -1+u \\ 3-2v \end{bmatrix}$

Točka kroz koju prolazi ravnina: $T(2,-1,3)$

Vektori smjera: $\vec{s_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{s_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Normala: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$-2\cdot(x-2) - 2\cdot(y+1) + 1\cdot(z-3) = 0$$

$$-2x - 2y + z - 1 = 0$$

Pravac i ravnina

Pravac s vektorom smjera $\vec{s}$ je **paralelan** s ravninom, ukoliko je vektor smjera $\vec{s}$ okomit na normalnu ravnine $\vec{n}$.

Okomitost vektora ispitujemo skalarnim produktom:

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$$

Pravac je **okomit** na ravninu ukoliko mu je smjer $\vec{s}$ proporcionalan vektoru normale $\vec{n}$.

$$\vec{s} = \lambda \cdot \vec{n}$$

Ispitajte u kojem su međusobnom položaju ravnina

$$2x - y + z + 3 = 0$$

i pravac

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}.$$

Vektor normale: $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Vektor smjera pravca: $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 0$$

Zadani pravac je paralelan s ravninom.

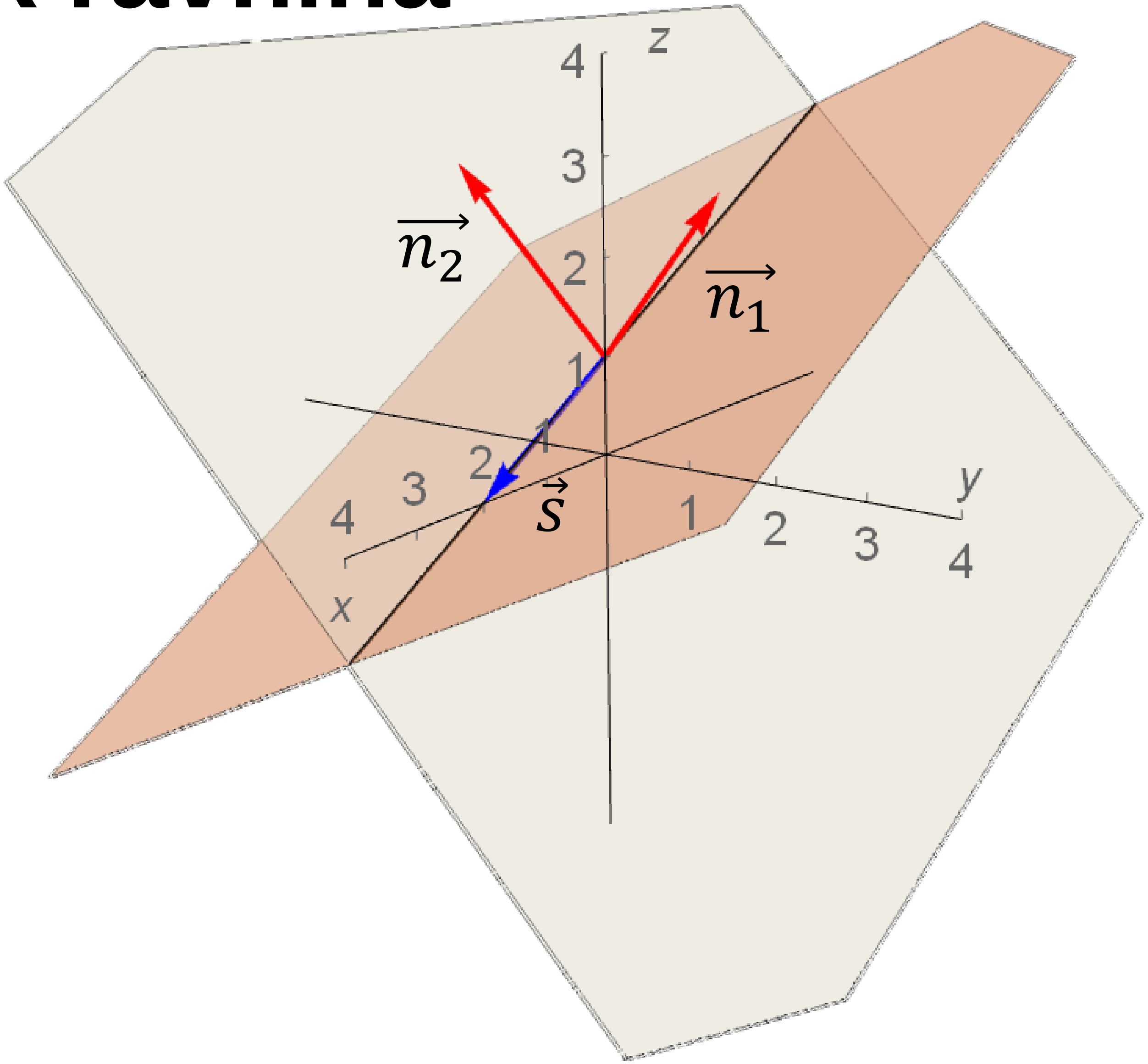
Presjek ravnina

Dvije ravnine su **paralelne** ukoliko su im vektori normale proporcionalni:

$$\overrightarrow{n_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{n_2}.$$

Ukoliko ravnine nisu paralelne, tada im je presjek pravac, za čiji vektor smjera vrijedi:

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}.$$



Presjek ravnina

Presjek dviju ravnina zapisanih pomoću opće jednadžbe određujemo rješavanjem sustava s dvije jednadžbe i tri nepoznanice.

Za rješavanje takvog sustava koristimo Gaussovu metodu.

Rješenje će biti parametarsko, odnosno rješenjem će biti opisano beskonačno mnogo točaka koje leže na pravcu presjeka tih ravnina.

Odredite pravac koji je presjek ravnina

$$x - y + 2z = 3 \quad \text{i} \quad 2x + y + z = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \cdot (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 3 & -3 & | & -6 \end{bmatrix} : 3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \end{bmatrix} \cdot 1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$$x + z = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - t$$

$$y - z = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2 + t$$

$$z = t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

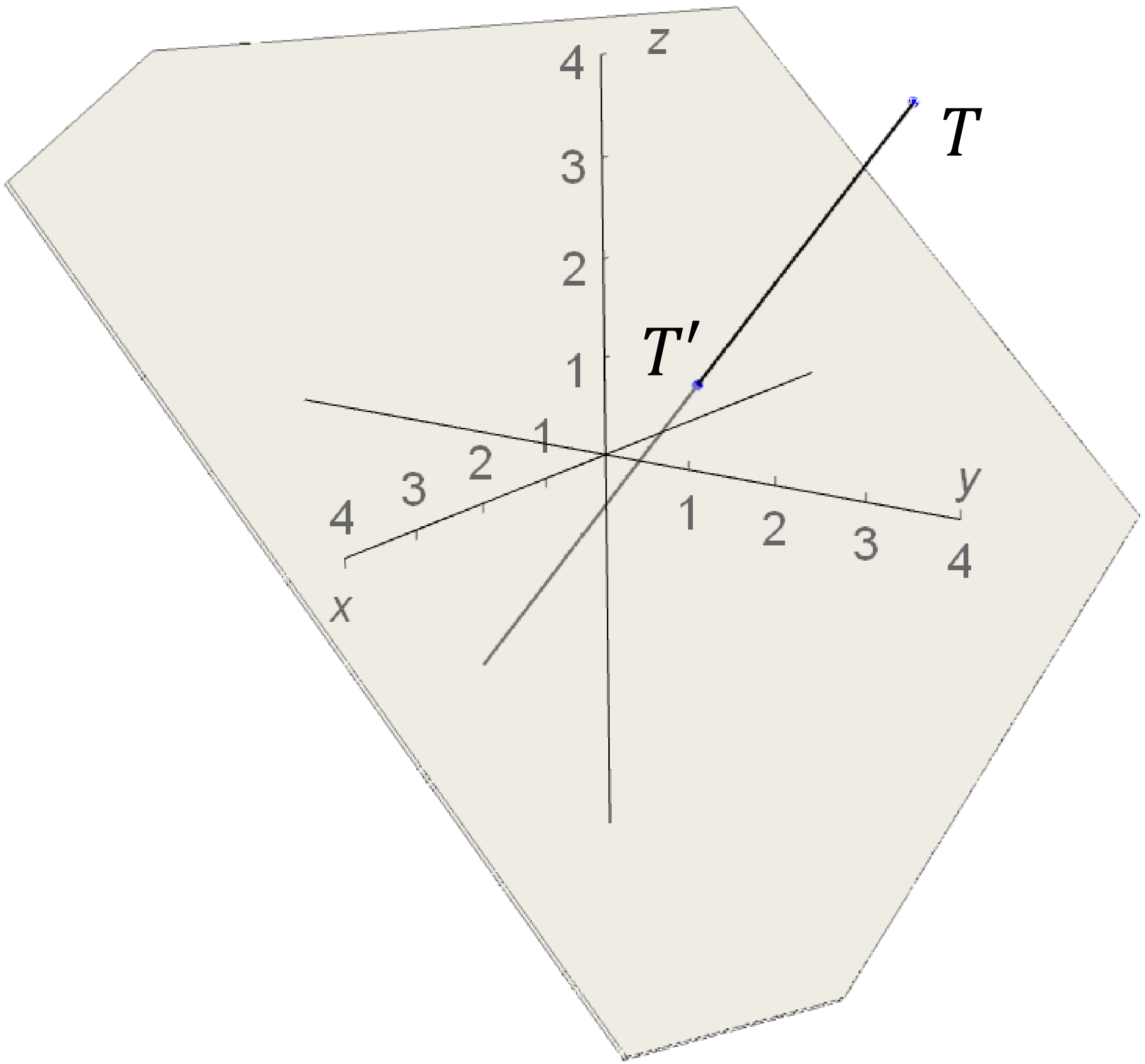
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - t \\ -2 + t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{s}$$

ALGEBRA

Udaljenost točke od ravnine

Udaljenost točke $T(x_0, y_0, z_0)$ do ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$ jednaka je udaljenosti točke T i njoj najbliže točke T' koja se nalazi na ravnini.



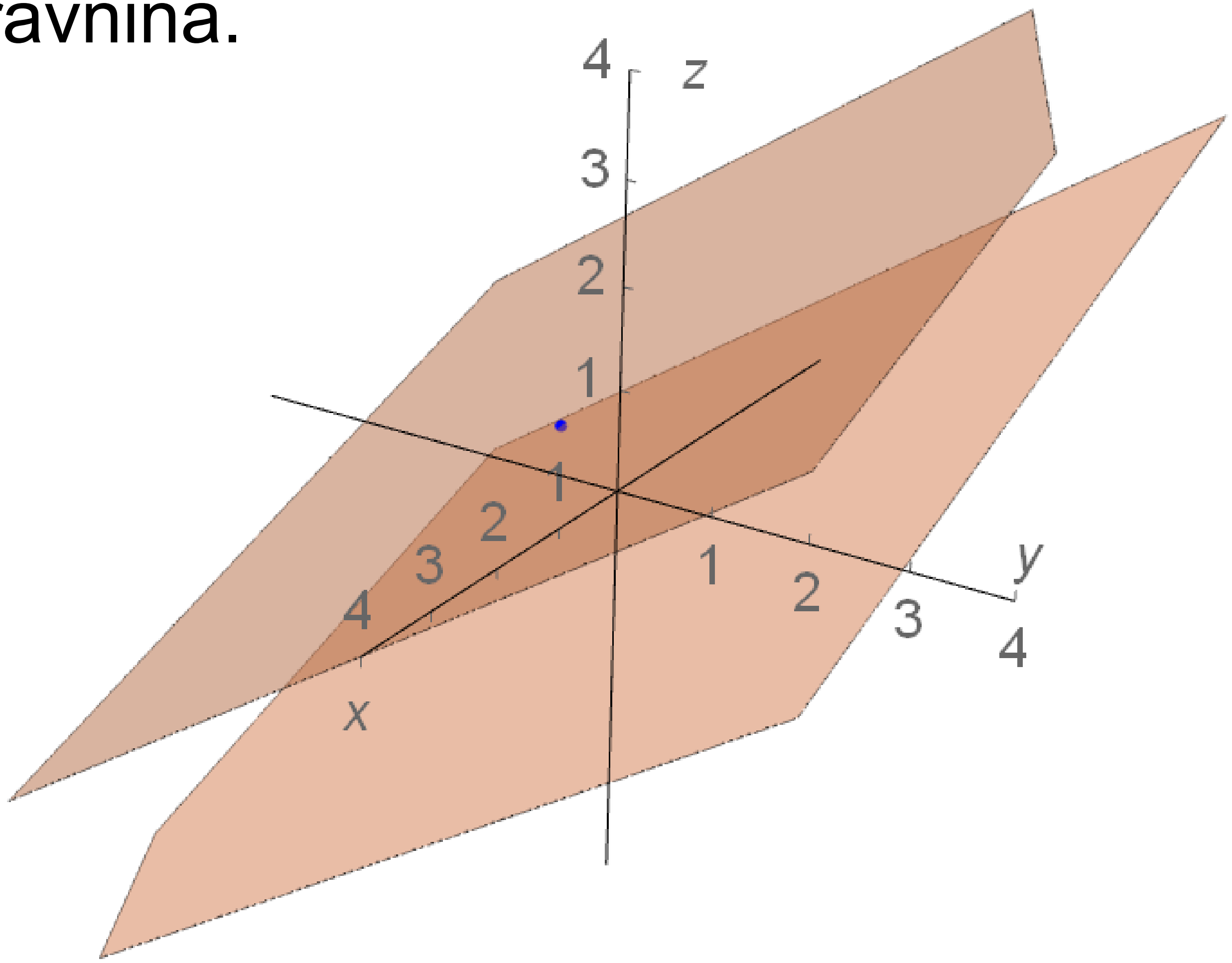
$$d = d(T, T')$$

$$\boxed{d = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Zadana su dvije paralelne ravnine:

$$-x + 2y - 3z + 4 = 0 \quad \text{i} \quad -x + 2y - 3z - 2 = 0.$$

Odredite udaljenost između tih ravnina.



Udaljenost između dvije paralelne ravnine jednaka je udaljenosti točke s jedne ravnine i druge ravnine.

Prvo odredimo jednu točku na prvoj ravnini.

Za $x = 0, z = 0$ imamo $y = -2$.

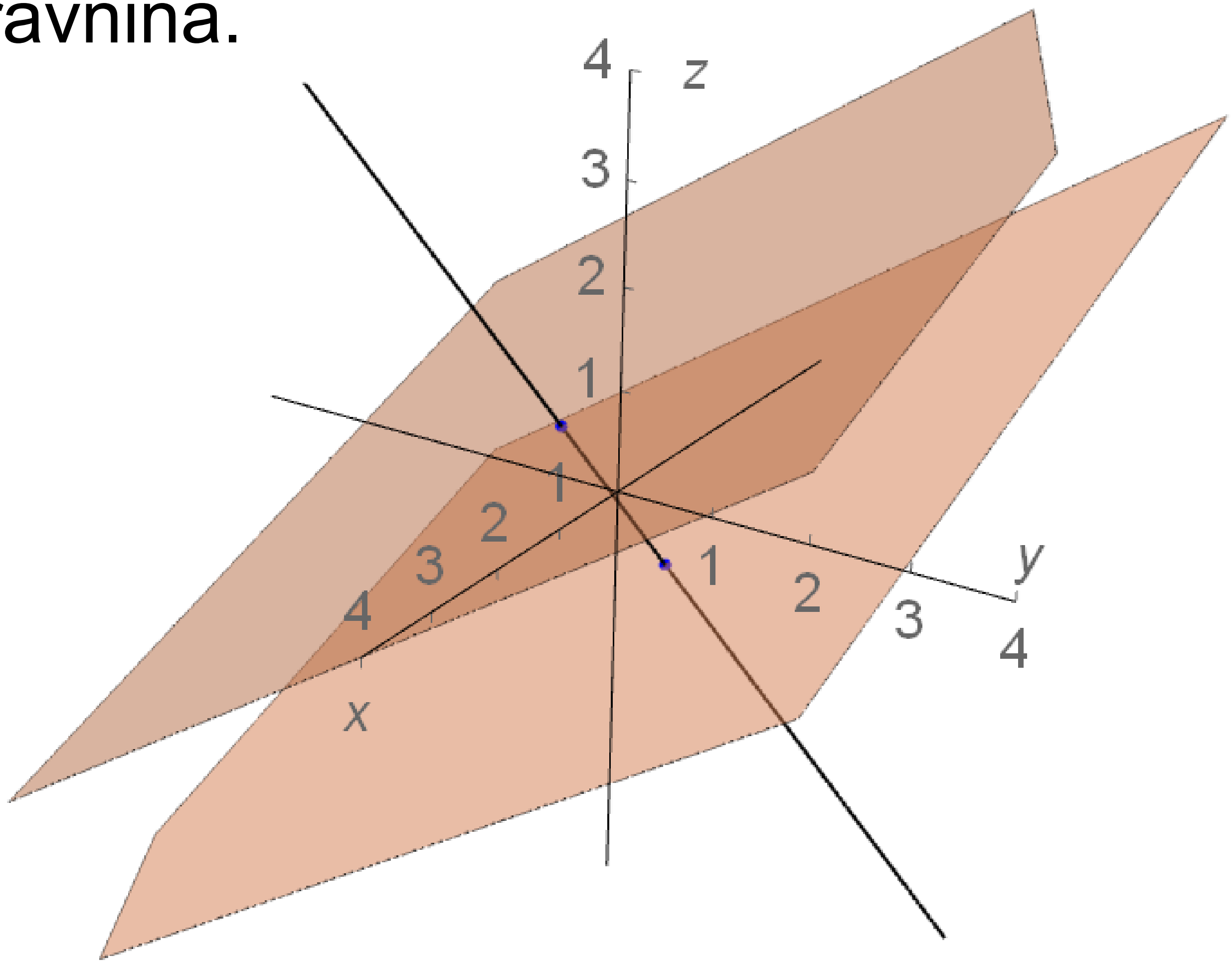
$$A(0, -2, 0)$$

Zadana su dvije paralelne ravnine:

$$-x + 2y - 3z + 4 = 0 \quad \text{i} \quad -x + 2y - 3z - 2 = 0.$$

Odredite udaljenost između tih ravnina.

$$A(0, -2, 0)$$



Računamo udaljenost točke A do druge ravnine.

$$d = \frac{|-0 + 2 \cdot (-2) - 0 - 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2}}$$

$$d = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

Hvala ☺