MATEMATIKA

Vektori

Vektori

Knjiga *„Matematika za IT”*

- Poglavlje „Vektori”, str. 162. – 172.

Vektori

Gdje u „stvarnom životu” susrećemo vektore?

Više-manje svugdje oko nas.

Sila, položaj, brzina, akceleracija – sve su to veličine koje se prikazuju pomoću vektora.

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_en.html

Primjena vektora je velika u računalnoj grafici, kao i robotici – kretanje točaka po ekranu, ili robotske ruke u prostoru.

Vektori

No, jedno od zanimljivijih područja upotrebe vektora je u (digitalnoj) prezentaciji boja.

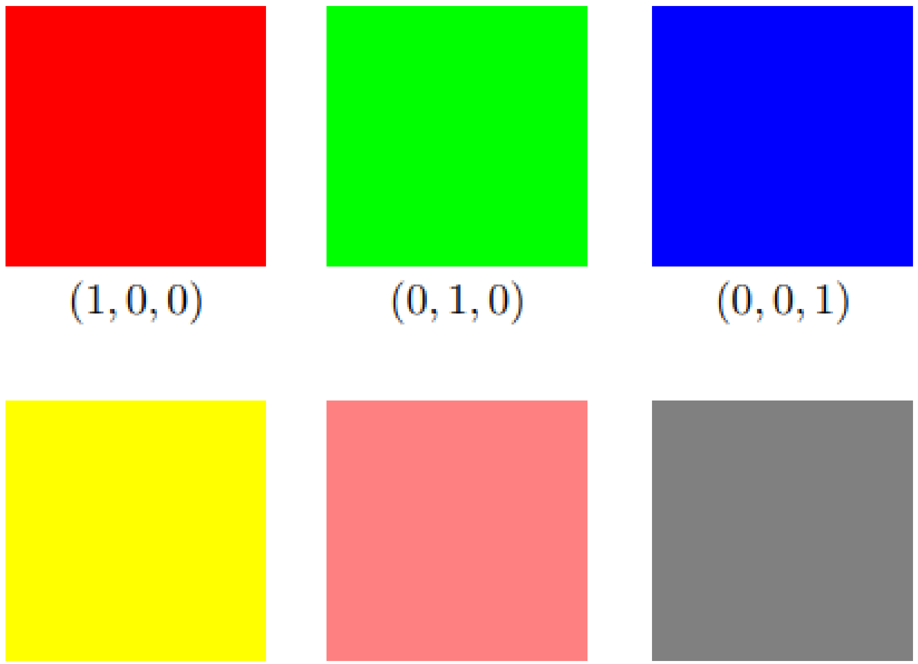
Naše oko boje vidi pomoću senzora koji registriraju crvenu, zelenu i plavu boju. Ostale boje dobivaju se kombiniranjem tih osnovnih boja.

Na isti način se boje prikazuju i digitalno (RGB – red / green / blue).

Kompjuterski ekrani i televizori emitiraju boju pomoću malih gusto naslaganih emitera crvenog, zelenog i plavog svjetla.

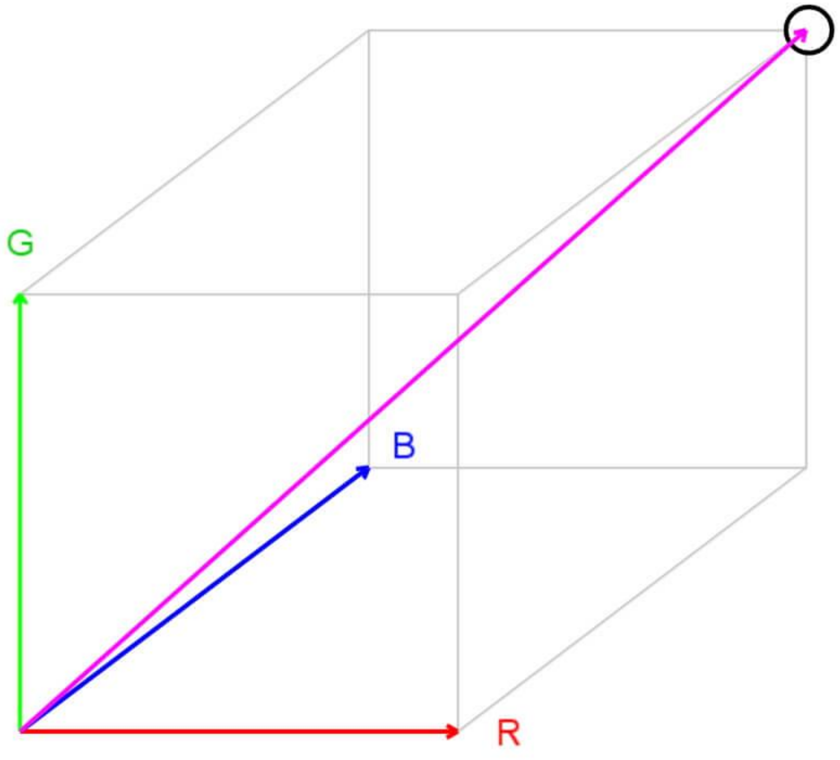
Vektori

Ostale boje dobivaju se kao linearna kombinacija tih osnovnih (vektora) boja.



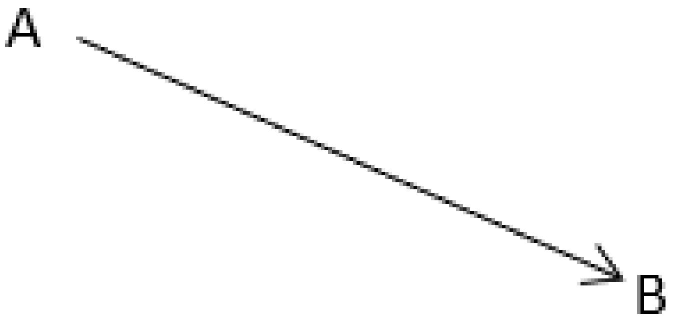
$(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$

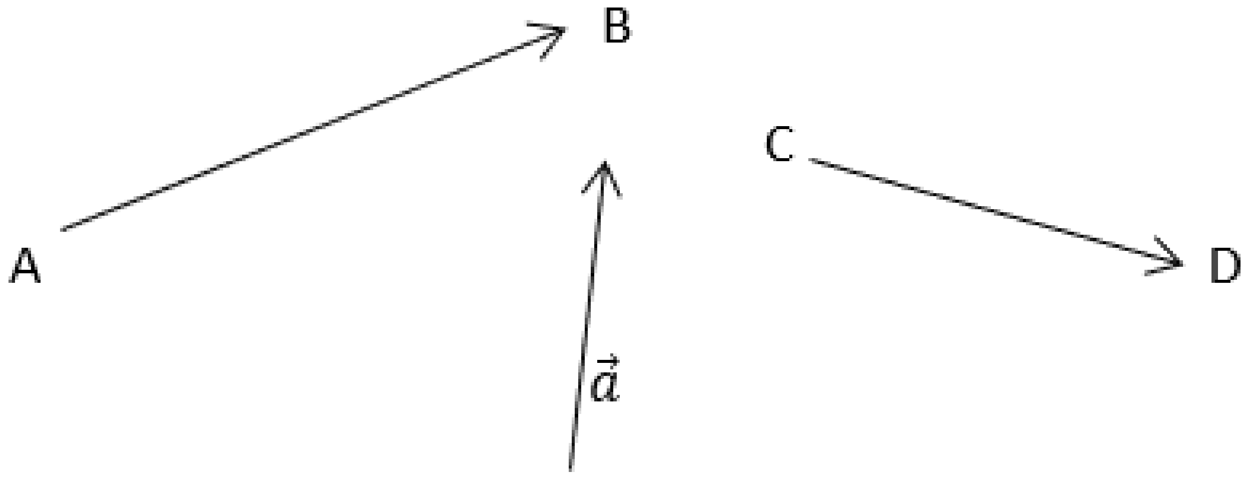
$(1,1,0)$ $(1,0.5,0.5)$ $(0.5,0.5,0.5)$



Definicija vektora

Vektor je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ kojoj razlikujemo početnu (A) i završnu točku (B). Završna točka je označena strelicom.





Vektore označavamo početnom i završnom točkom, poput $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ili malim slovom $\vec{a}$ iznad kojeg se nalazi strelica.

Definicija vektora

Vektor $\overrightarrow{AB}$ je određen ako poznamo njegovu **duljinu**, **smjer** i **orijentaciju**.

Duljina (modul, norma) vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je udaljenost između početne i konačne točke. Duljinu vektora označavamo s $|\vec{a}|$ ili $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ili $d(A, B)$.

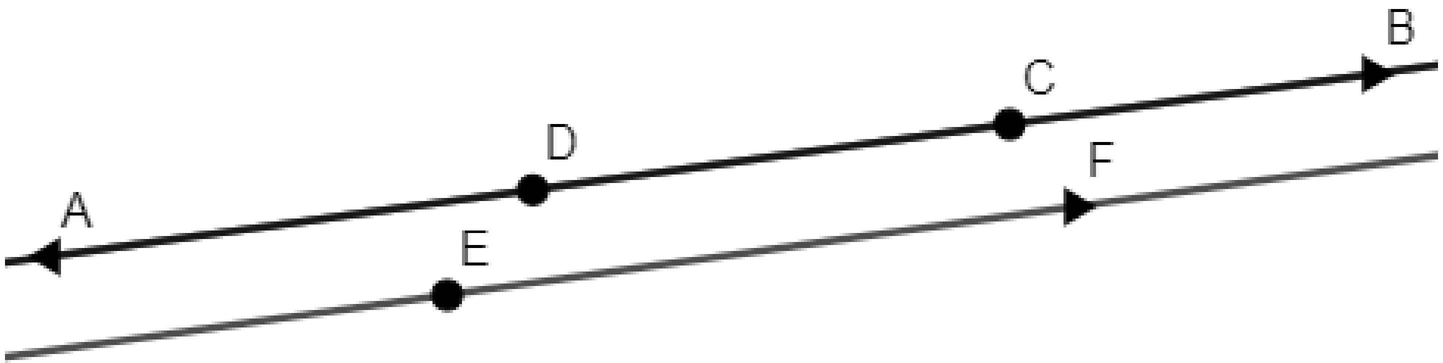
Definicija vektora

Smjer vektora određen je pravcem na kojem je vektor smješten.

Vektori koji leže na istom ili paralelnim pravcima imaju isti smjer i kažemo da su *kolinearni* ili *linearno zavisni*.

Vektori koji imaju isti smjer mogu imati istu ili suprotnu **orijentaciju**.

Zadani su vektori: $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{EF}$. Koji imaju istu, a koji suprotnu orijentaciju?



Definicija vektora

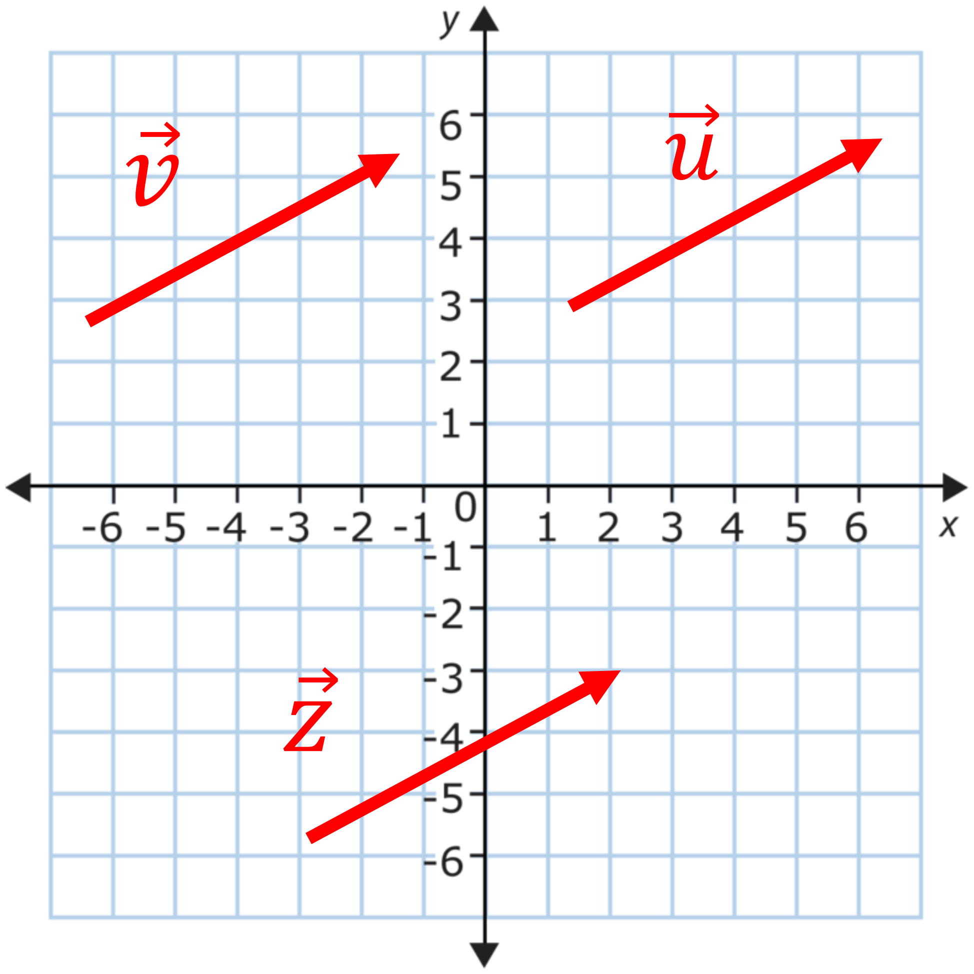
Vektor je **skup** svih usmjerenih dužina koje imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju.

Kažemo da je vektor **klasa** usmjerenih dužina iste duljine, smjera i orijentacije. U praksi to znači da usmjerenu dužinu smijemo **translatirati**, a da ona i dalje predstavlja isti vektor.

Za vektore koji imaju istu duljinu i smjer, ali suprotnu orijentaciju kažemo da su **suprotni vektori**.

Za vektor koji ima istu početnu i konačnu točku A kažemo da je **nul-vektor** i označavamo ga s $\vec{0}$ ili $\overrightarrow{AA}$.

Definicija vektora



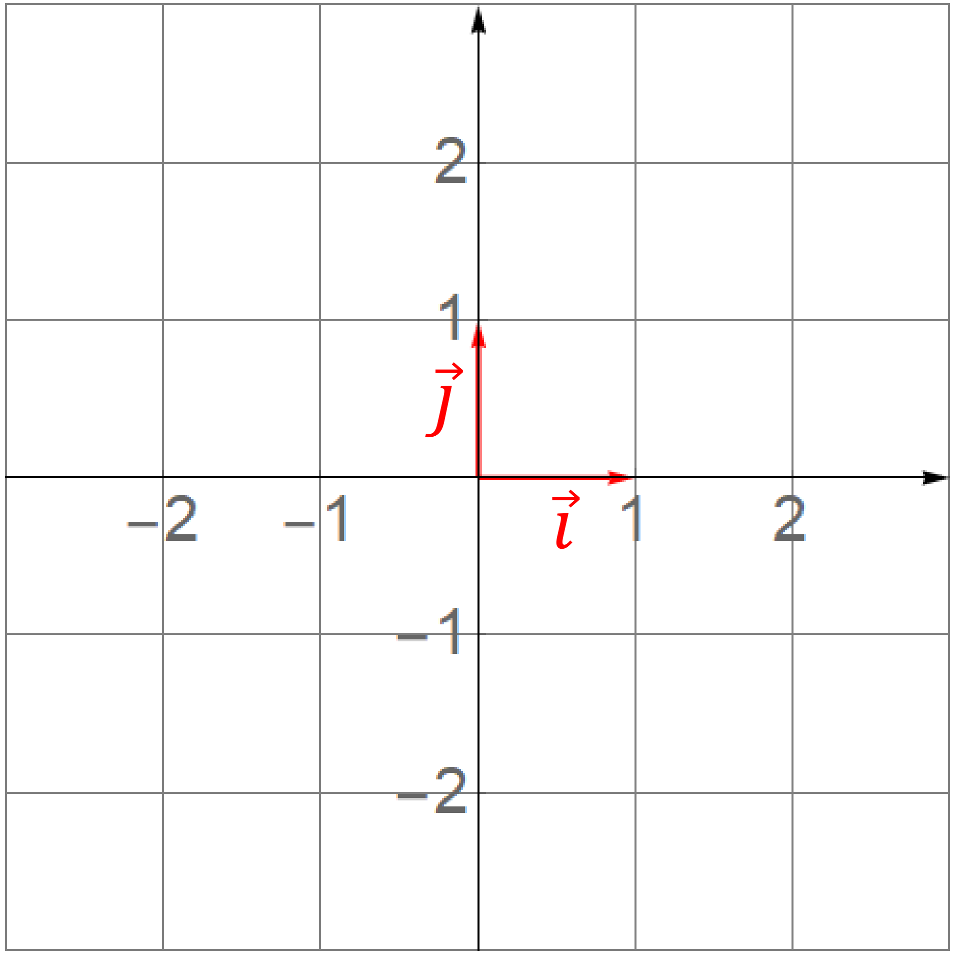
$$\vec{u} = \vec{v} = \vec{z}$$

Vektori u koordinatnoj ravnini

U koordinatnoj ravnini za predstavljanje vektora koristimo dva jedinična vektora smjera, $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$.

To su vektori duljine jedan, čiji su pravci smjera koordinatne osi.

Ostali vektori u ravnini mogu se prikazati kao linearna kombinacija ta dva vektora.



Vektori u koordinatnoj ravnini

$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

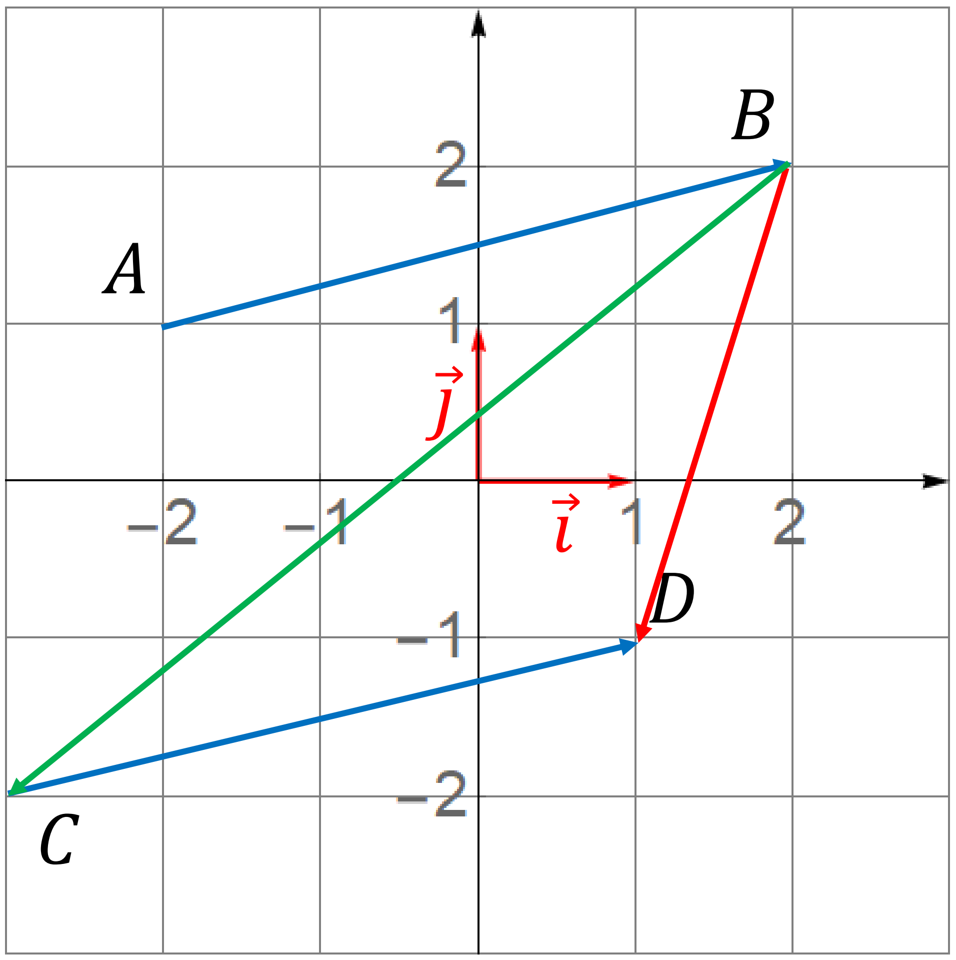
$$\overrightarrow{CD} = 4\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = -\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = -5\vec{i} - 4\vec{j} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$T_1(x_1, y_1), \qquad T_2(x_2, y_2)$$

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

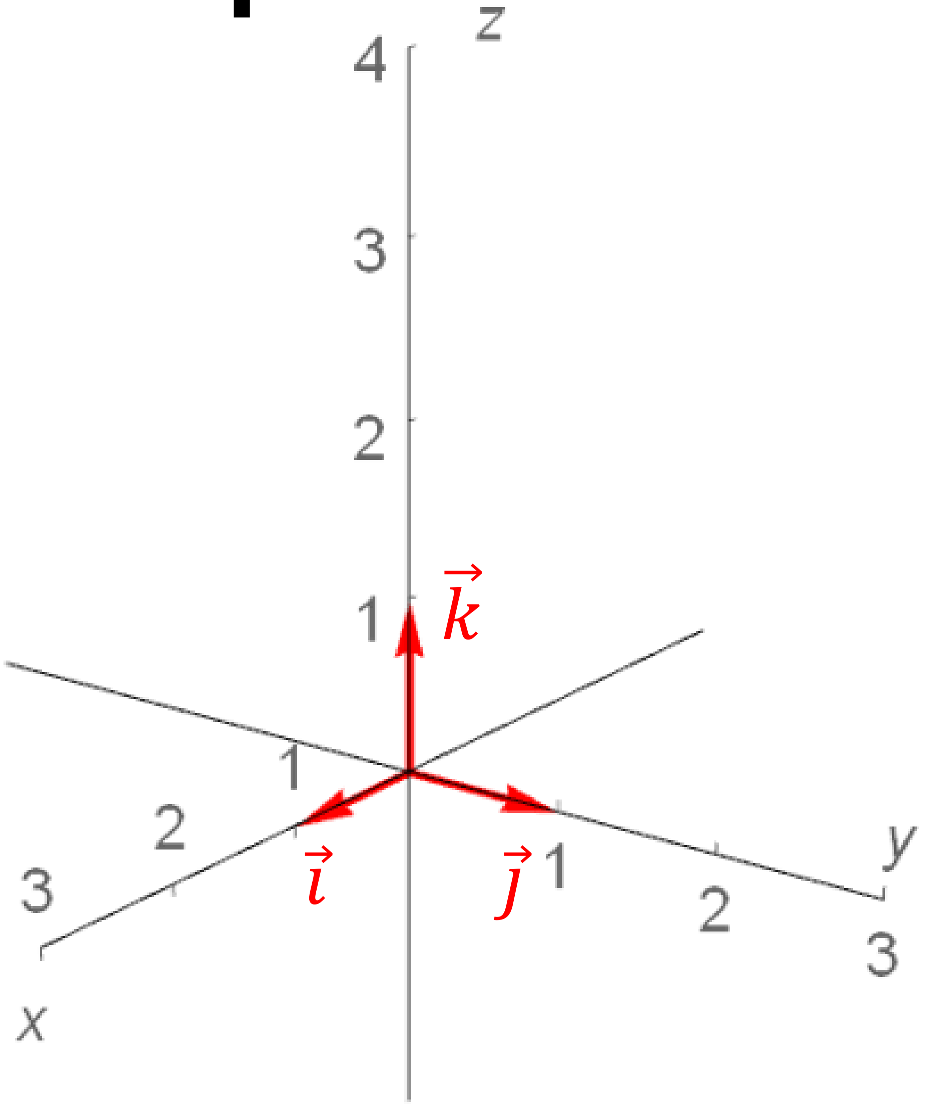


Vektori u koordinatnom prostoru

U koordinatnom prostoru za predstavljanje vektora koristimo tri jedinična vektora smjera, $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

To su vektori duljine jedan, čiji su pravci smjera koordinatne osi.

Ostali vektori u prostoru mogu se prikazati kao linearna kombinacija ta tri vektora.



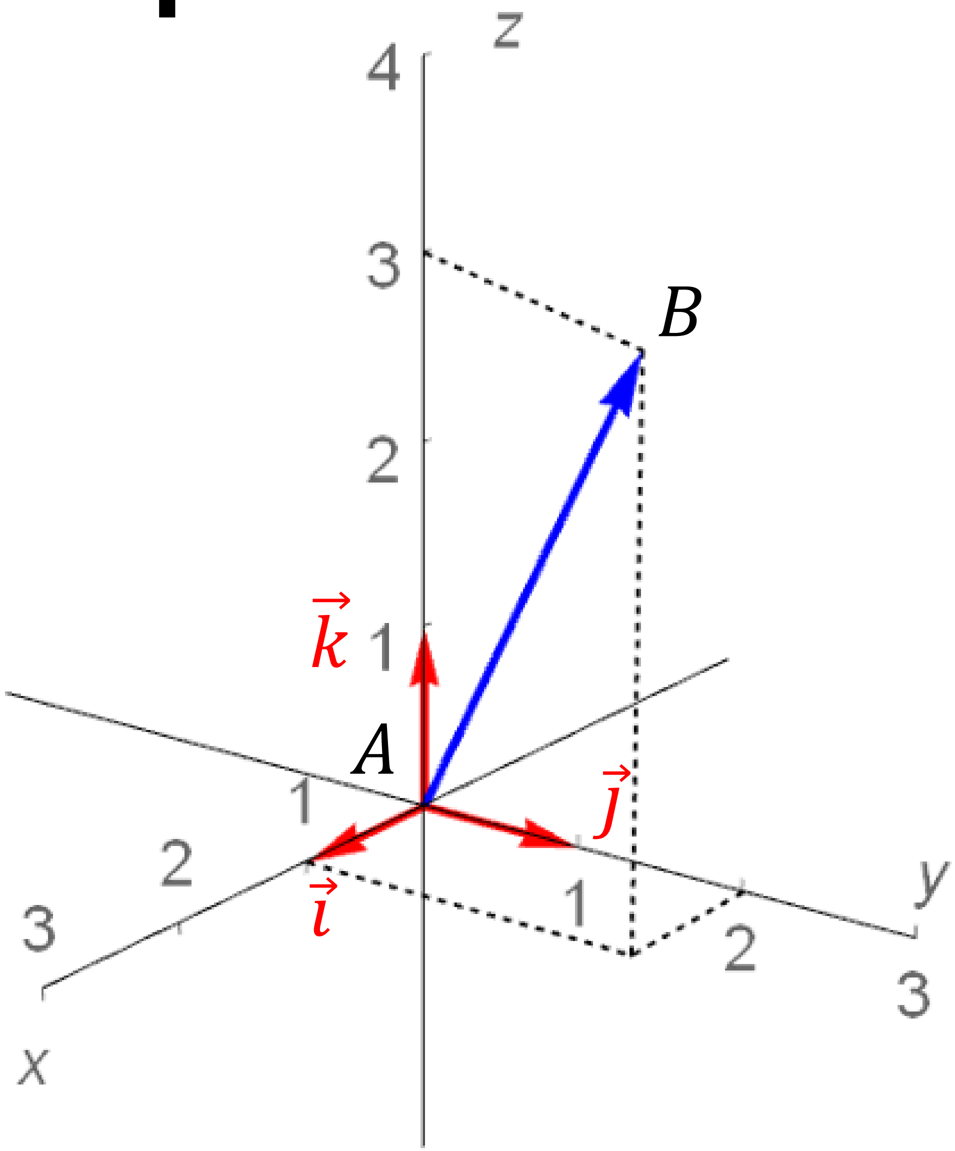
Vektori u koordinatnom prostoru

Na slici je prikazan vektor koji spaja točke $A(0,0,0)$ i $B(1,2,3)$.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T_1(x_1, y_1, z_1), \qquad T_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$



Modul vektora

Duljina (modul) vektora u koordinatnom zapisu:

U ravnini:

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}$$

U prostoru:

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2 + (z_a)^2}$$

Zbrajanje i oduzimanje vektora

Vektore zbrajamo i oduzimamo po koordinatama:

U ravnini:

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = x_b \cdot \vec{i} + y_b \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b) \cdot \vec{i} + (y_a + y_b) \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_a - x_b) \cdot \vec{i} + (y_a - y_b) \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{bmatrix}$$

Analogno, zbrajanje i oduzimanje provodimo u prostoru po svakoj od tri koordinate.

Zbrajanje i oduzimanje vektora

Vizualno, zbrajanje vektora provodimo po „**pravilu trokuta**”.

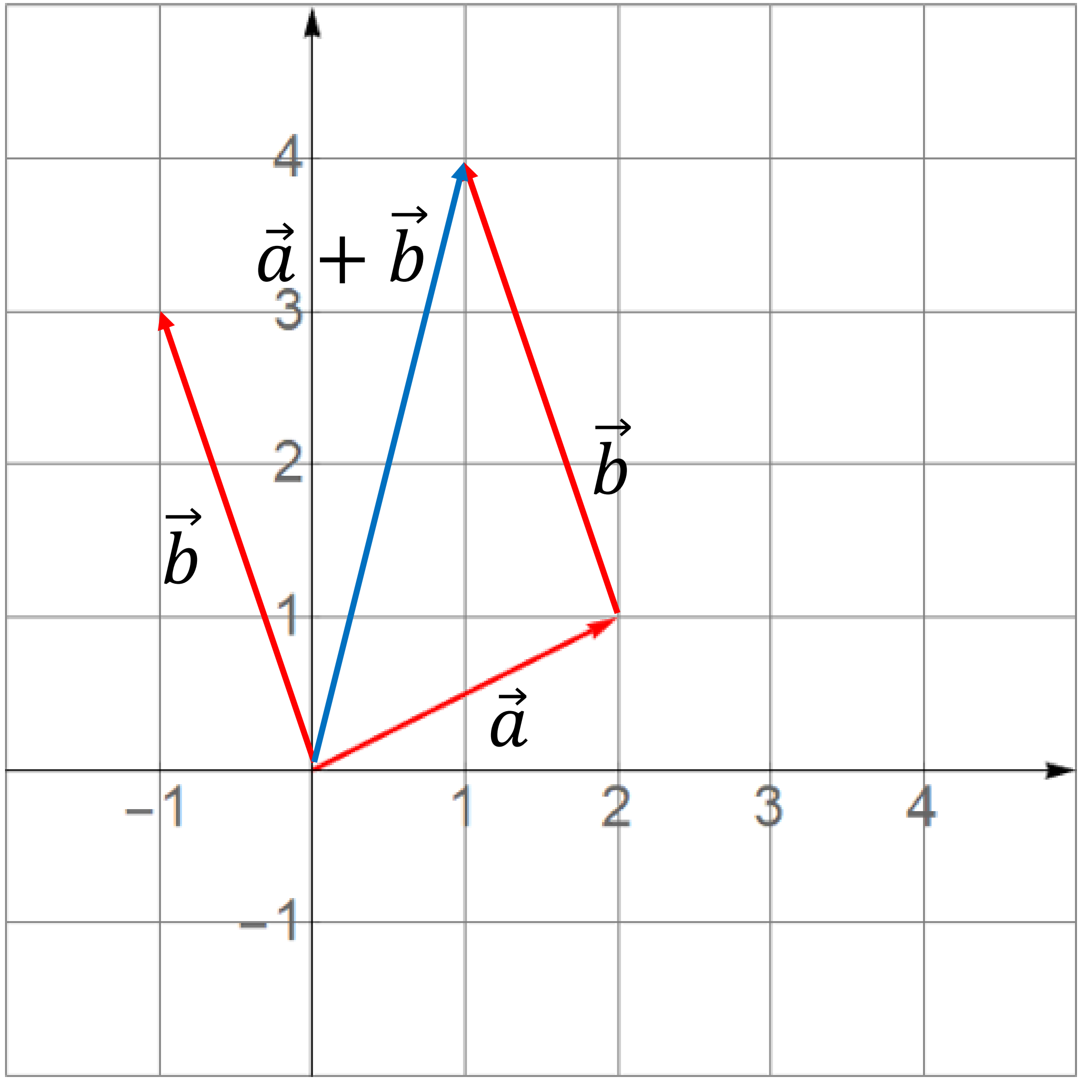
Zbrojimo vektore:

$$\vec{a} = 2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = -\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + (-\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath})$$

$$= \vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath}$$



Množenje vektora skalarom

Množenje vektora skalarom se provodi tako da pomnožimo svaku koordinatu tog vektora.

U ravnini: $\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot x_a) \cdot \vec{i} + (\alpha \cdot y_a) \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot x_a \\ \alpha \cdot y_a \end{bmatrix}$$

Analogno, množenje skalarom provodimo u prostoru po svakoj od tri koordinate.

Množenje vektora skalarom

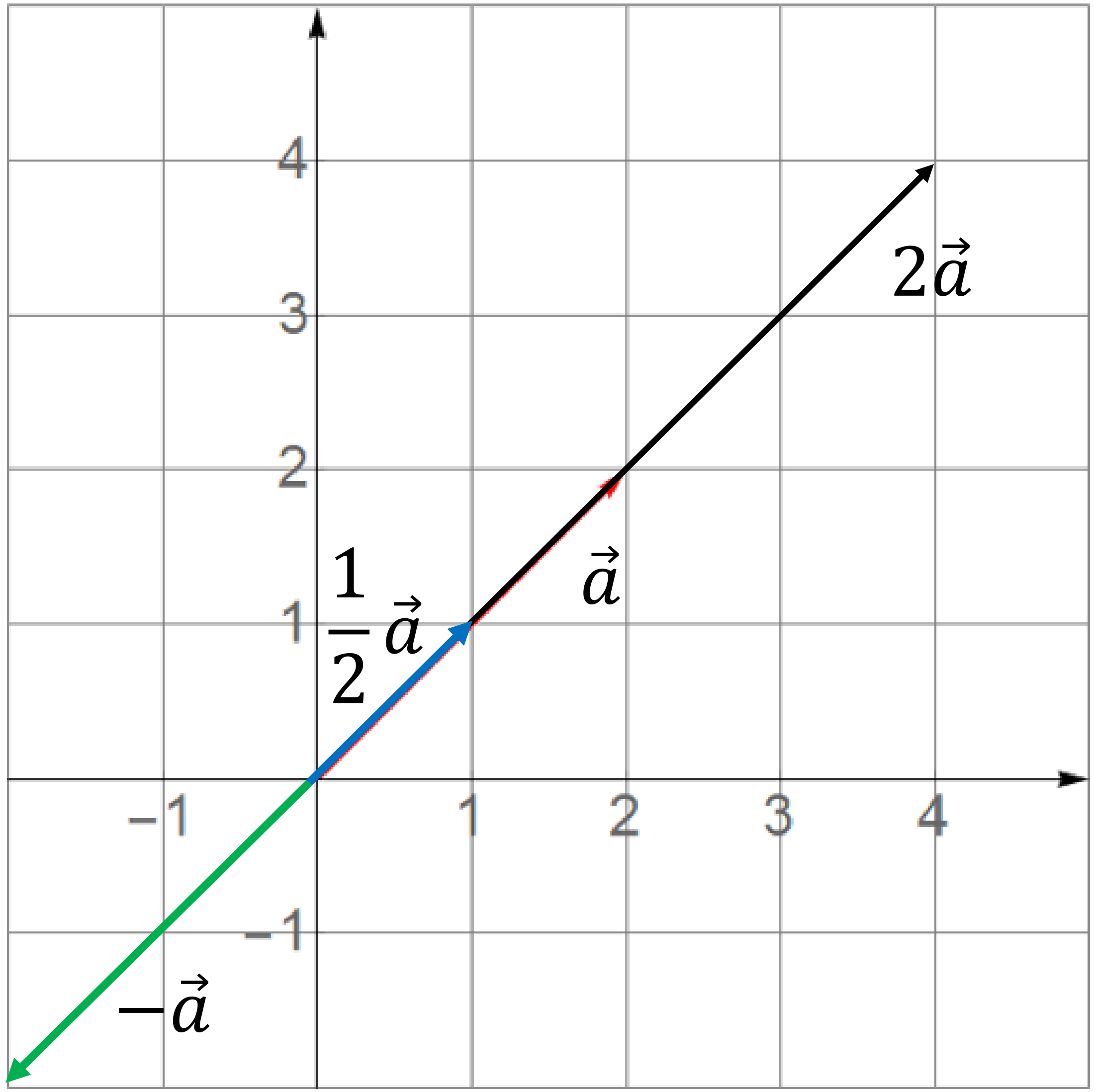
Množenjem skalarom, vektor zadržava svoj smjer, ali mijenja duljinu i (ponekad) orijentaciju.

$$\vec{a} = 2\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{a} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-\vec{a} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$



Množenje vektora

Vektore možemo pomnožiti na dva načina.

Prvi način je množenje vektora koje za rezultat ima broj (skalar).
Takvo množenje nazivamo **skalarnim produktom vektora.**
Oznaka za skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}$$

Drugi način je množenje vektora koje za rezultat ima vektor.
Takvo množenje vektora nazivamo **vektorski produkt vektora.**
Oznaka za vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$$

Skalarni produkt vektora

Rezultat skalarnog produkta (umnoška) vektora je broj (skalar).

Skalarni produkt koordinatiziranih vektora:

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = x_b \cdot \vec{i} + y_b \cdot \vec{j} + z_b \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}$$

Množimo odgovarajuće koordinate, i umnoške zbrojimo.

Skalarni produkt vektora

Drugi način da se odredi skalarni produkt vektora:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi}$$

gdje je ϕ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, tada su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno **okomiti**.

Ova nam formula omogućava da računamo kut između vektora.

Skalarni produkt vektora

Zadani su vektori $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Odredite kut između ta dva vektora.

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 3$$

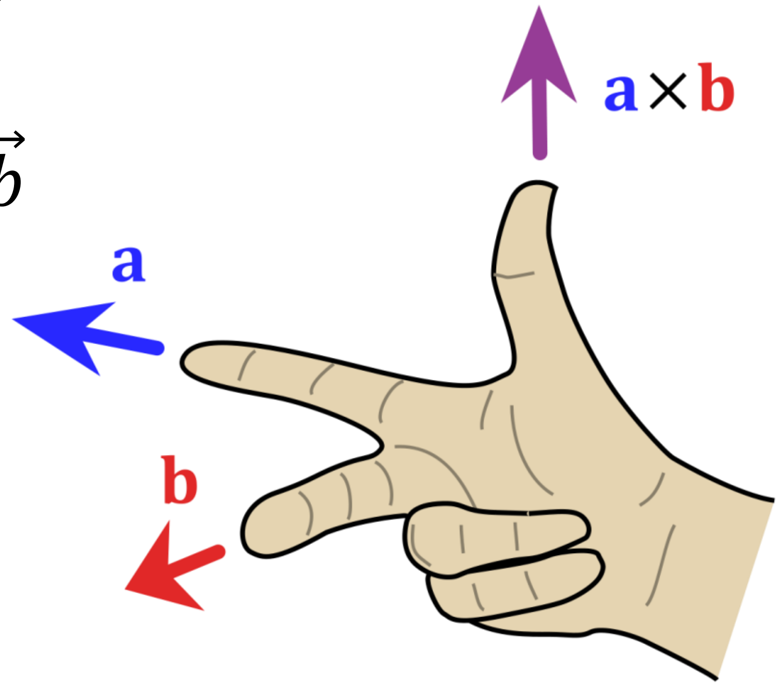
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$$

$$3 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos\phi \qquad \cos\phi = \frac{1}{2} \qquad \phi = 60^\circ$$

Vektorski produkt vektora

Rezultat vektorskog produkta (umnoška) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ kojemu je:

- duljina jednaka $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\phi$
- smjer okomit na smjerove vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$
- orijentacija određena „*pravilom desne ruke*”



Vektorski produkt vektora

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koordinatizirani, tada $\vec{a} \times \vec{b}$ računamo pomoću slijedeće determinante:

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad \vec{b} = x_b \cdot \vec{i} + y_b \cdot \vec{j} + z_b \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}}$$

Duljina vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ jednaka je površini paralelograma kojeg tvore vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

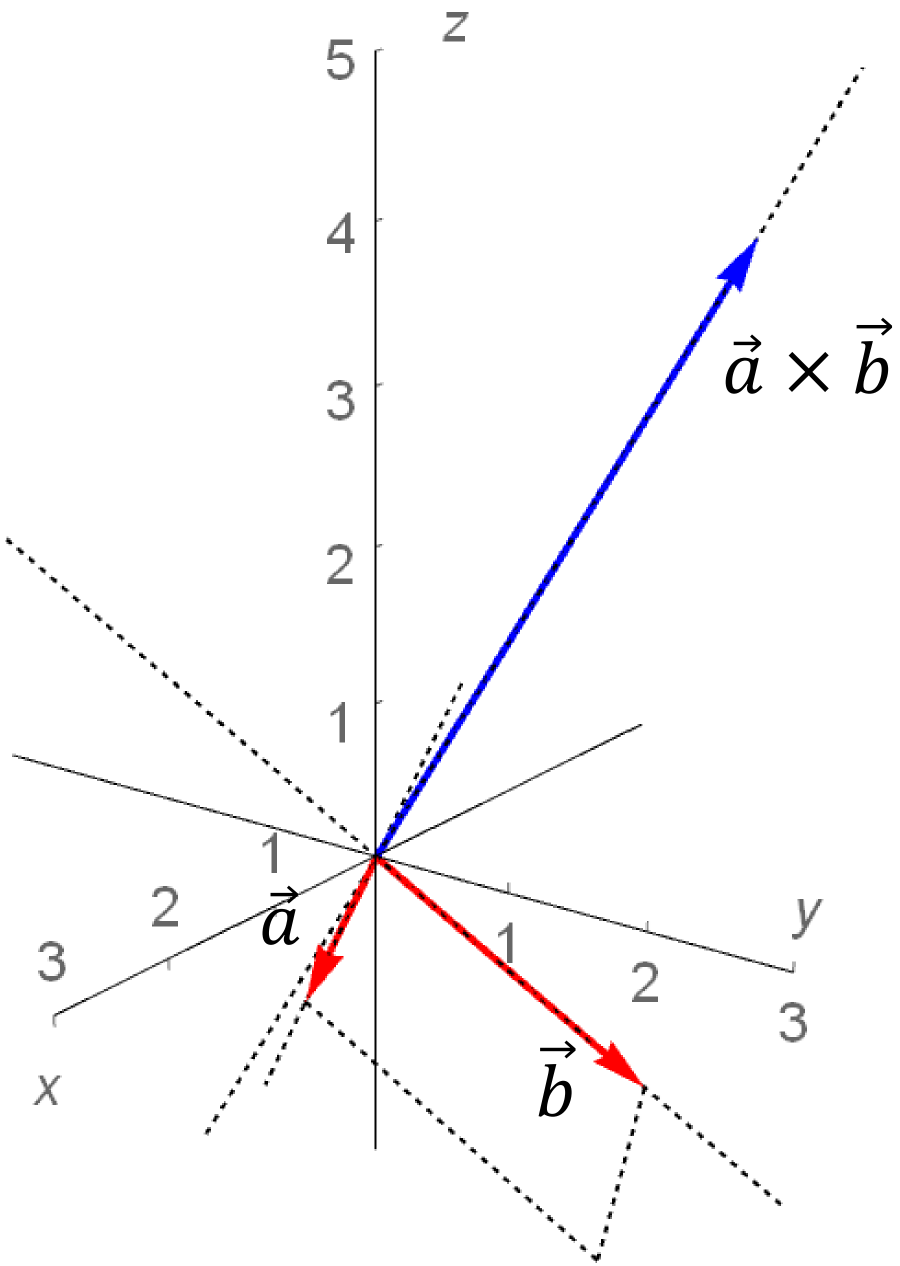
Odredite vektorski produkt vektora

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$= (-\vec{\imath} + 4\vec{k}) - (-2\vec{\jmath})$$

$$= -\vec{\imath} + 4\vec{k} + 2\vec{\jmath} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Hvala ☺