1.2 Permutacije

Permutacija skupa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n različitih elemenata uređena je $n-$torka svih njegovih elemenata.

Broj permutacija

Broj različitih permutacija skupa od n elemenata je
$P_n = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Primjer 1.16.

Zadan je skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) Koliko ima permutacija skupa S?

(b) Koliko permutacija skupa S počinje brojem 1?

(c) Koliko permutacija skupa S ne završava brojem 5?

(d) Koliko permutacija skupa S počinje sa 36?

Primjer 1.17.

Na koliko načina možemo na policu rasporediti m knjiga iz matematike i n knjiga iz informatike, tako da

a) knjige iz matematike budu na prvih m mjesta,

b) sve knjige iz matematike budu jedna do druge?

Primjer 1.18.

Delegaciju studenata Visoke škole za primijenjeno računarstvo čini šest studenata tako da sa svake od tri godine postoje po dva predstavnika koji su različitih spolova. Na koliko načina možemo te predstavnike sjesti za ravni stol, jednog do drugog, tako da

a) mogu sjesti po svojoj volji,

b) predstavnici iste godine sjede jedan do drugog,

c) jedna do druge ne smiju sjediti dvije osobe istog spola?

Primjer 1.19

Slova riječi $TATA$ možemo permutirati na sljedećih šest načina: $AATT$, $ATAT$, $ATTA$, $TAAT$, $TATA$, $TTAA$.

Permutacije s ponavljanjem

Neka u nizu $s_1, s_2, \ldots, s_n$ postoji prva skupina od k_1 identičnih elemenata, druga skupina od k_2 identičnih elemenata, ..., $r-$ta skupina od k_r identičnih elemenata, $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. Bilo koji razmještaj elemenata takva niza nazivamo permutacijom s ponavljanjem. Njihov ukupni broj označavamo s $P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_r}$ i vrijedi

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_r!}.$$

Primjer 1.20.

Koliko se različitih riječi može napisati od slova riječi MATEMATIKA?

1.3 Kombinacije

- Na koliko se načina može izvući k elemenata iz skupa S od n elemenata, ne pazeći na njihov poredak? Označimo taj broj s C_n^k.

Broj C_n^k jednak je:

- broju načina na koji iz skupa od n elemenata možemo izvući k elemenata, ne pazeći na njihov poredak,
- broju različitih podskupova s k elemenata uzetih iz skupa od n elemenata.

Kombinacije

Svaki podskup od k različitih elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$.

Binomni koeficijent

označavamo s $\binom{n}{k}$, te čitamo 'n povrh k'. Dakle, vrijedi

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Za binomne koeficijente vrijedi:

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},\ \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},\ \binom{n}{n} = 1.$$

Svojstvo simetrije: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, za $k \leq n$.

Primjer 1.21.

Na koliko se načina u igri LOTO može izvući 7 brojeva od 39 zadanih?

Primjer 1.22.

Imamo n predmeta u jednoj vreći i m predmeta u drugoj vreći. Iz prve se vreće vadi r predmeta, a iz druge s predmeta. Izvađene predmete nanizujemo jedan do drugog. Koliko takvih nizova možemo dobiti?

Primjer 1.23.

Od 7 žena i 4 muškarca treba izabrati delegaciju. Na koliko se načina može izabrati delegacija tako da se ona sastoji od

a) petero ljudi,

b) petero ljudi, i to 3 žene i 2 muškarca,

c) bilo kojeg broja ljudi ali mora biti jednako muškaraca i žena?

Primjer 1.24.

Koliko je različitih mogućnosti podjele 32 karte na 4 igrača tako da se svakom dijeli odjednom po 8 karata?

Primjer 1.25.

Na koliko se načina iz snopa od 32 karte može odabrati 8 karata tako da među njima bude

a) točno tri kralja i tri asa,

b) barem jedan as?