MATEMATIKA

Polinomi

Polinomi

Knjiga „*Matematika za IT*”

- Poglavlje „Polinomi”, str. 6. – 25.

Neka su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tada se

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

naziva polinomom n-tog stupnja.

Brojevi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se nazivaju koeficijentima polinoma.

Stupanj polinoma je najveća potencija varijable x.

Svaki pojedini dio polinoma koji se zbraja naziva se monom.

Polinomi

Kojeg su stupnja navedeni polinomi?

a) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$	Polinom drugog stupnja
b) $q(x) = x^2 + 6x^5 + 12x^3 - 1$	Polinom petog stupnja
c) $p(x) = \sqrt{x} + 4$	Nije polinom
d) $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^4$	Polinom četvrtog stupnja
e) $p(x) = 1$	Polinom nultog stupnja
f) $r(x) = 0$	Nul-polinom
g) $g(x) = \frac{x^3}{3} - x + \sin x$	Nije polinom
h) $h(x) = \frac{1}{3} - 2x + \frac{4}{x}$	Nije polinom

Jednakost polinoma

Polinomi $p(x)$ i $q(x)$ su jednaki ako:

- su jednakog stupnja
- im se **svi** koeficijenti podudaraju.

Jesu li polinomi $q(x) = (x - 1)(x + 1)$ i $p(x) = x^2 - 1$ jednaki?

Da.

Jednakost polinoma

Primjer

Odredite a, b, c i d takve da polinom

$p(x) = a\,x^3 + 3x - 2$ i polinom

$q(x) = -b\,x^d + 4x^c - 2$ budu jednaki.

Rješenje:

$$a = 4, \qquad b = -3, \qquad c = 3, \qquad d = 1.$$

Zbrajanje i oduzimanje polinoma

Polinomi se zbrajaju (oduzimaju) tako da se zbrajaju (oduzimaju) koeficijenti uz iste potencije.

Primjer. Odredite zbroj i razliku polinoma $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - x$ i $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

$$p(x) + q(x) = (2x^3 - 4x^2 - x) + (x^2 + 3x + 2) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

$$p(x) - q(x) = (2x^3 - 4x^2 - x) - (x^2 + 3x + 2) = 2x^3 - 5x^2 - 4x - 2$$

Množenje polinoma

Polinomi se množe tako da se svaki monom iz prvog polinoma pomnoži sa svakim monomom iz drugog polinoma.

Primjer. Odredite umnožak polinoma $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - x$ i $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^3 - 4x^2 - x) \cdot (x^2 + 3x + 2)$$

$$= 2x^3 \cdot x^2 + 2x^3 \cdot 3x + 2x^3 \cdot 2 - 4x^2 \cdot x^2 - 4x^2 \cdot 3x - 4x^2 \cdot 2 - x \cdot x^2 - x \cdot 3x - x \cdot 2$$

$$= 2x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^4 - 12x^3 - 8x^2 - x^3 - 3x^2 - 2x$$

$$= 2x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 11x^2 - 2x$$

Dijeljenje polinoma

Polinom $p(x)$ se može podijeliti polinomom $q(x)$ samo ako je stupanj polinoma $p(x)$ veći ili jednak stupnju polinoma $q(x)$.

$$p(x) : q(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{o(x)}{q(x)}$$

OSTATAK

DJELITELJ

RJEŠENJE

Ako je stupanj polinoma $p(x)$ jednak n, a stupanj polinoma $q(x)$ jednak m, tada je stupanj polinoma $r(x)$ jednak $n - m$, a stupanj polinoma ostatka $o(x)$ je manji od m.

Dijeljenje polinoma

Primjer. Podijelite polinom $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - x$ polinomom $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

rješenje, $r(x)$

$$
\begin{array}{rl}
 & (2x^3 - 4x^2 - x) : (x^2 + 3x + 2) = 2x - 10 \\
- & \underline{2x^3 + 6x^2 + 4x} \\
 & -10x^2 - 5x \\
- & \underline{-10x^2 - 30x - 20} \\
 & 25x + 20
\end{array}
$$

ostatak, $o(x)$

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x}{x^2 + 3x + 2} = 2x - 10 + \frac{25x + 20}{x^2 + 3x + 2}$$

Nultočke polinoma

Broj x_1 za kojeg vrijedi $p(x_1) = 0$ naziva se nultočka polinoma $p(x)$.

Osnovni teorem algebre:

Svaki polinom n-tog stupnja ima točno n nultočaka $x_1, x_2, \ldots, x_n$, računajući kratnost i polinom $p(x)$ se može zapisati u obliku:

$$p(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Polinom nultog stupnja

Polinom oblika $p(x) = a_0$ nazivamo polinomom nultog stupnja.

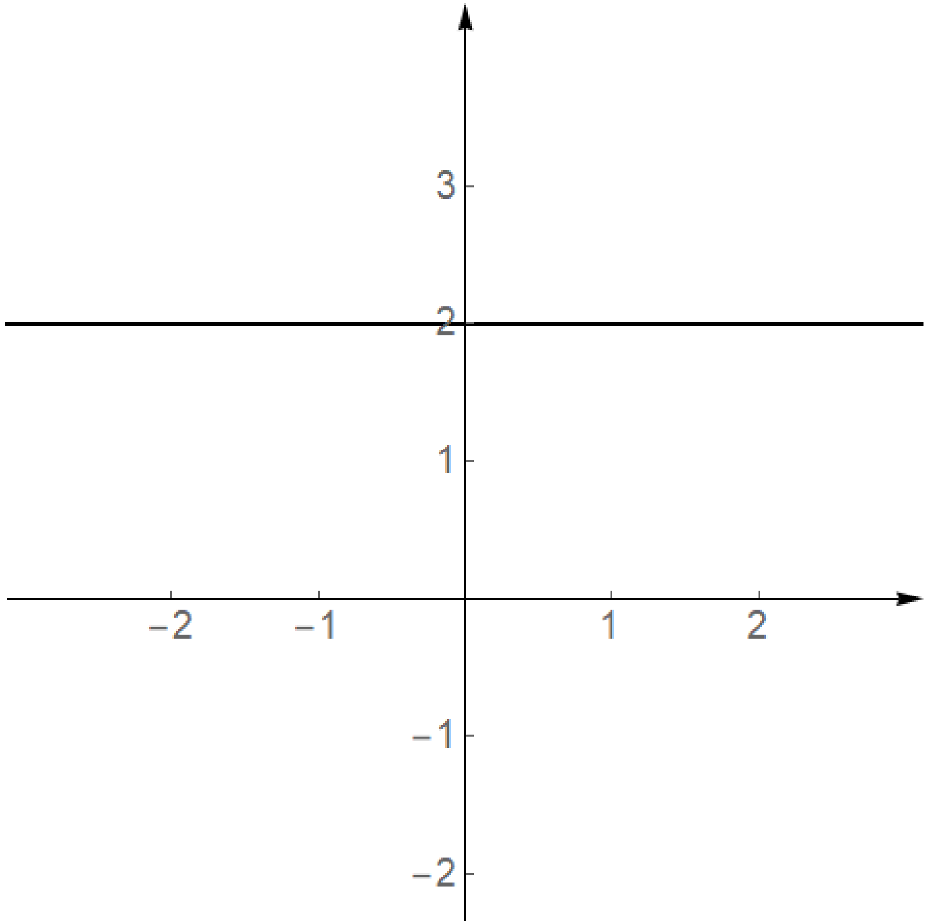
Uvjet: $a_0 \neq 0$

$f(x) = c \neq 0$

polinom nultog stupnja

$f(x) = 0$

nul-polinom



Na slici je prikazan graf polinoma nultog stupnja, pravac $y = 2$.

Polinom prvog stupnja

Polinom oblika $p(x) = a_1 x + a_0$ nazivamo polinomom prvog stupnja.

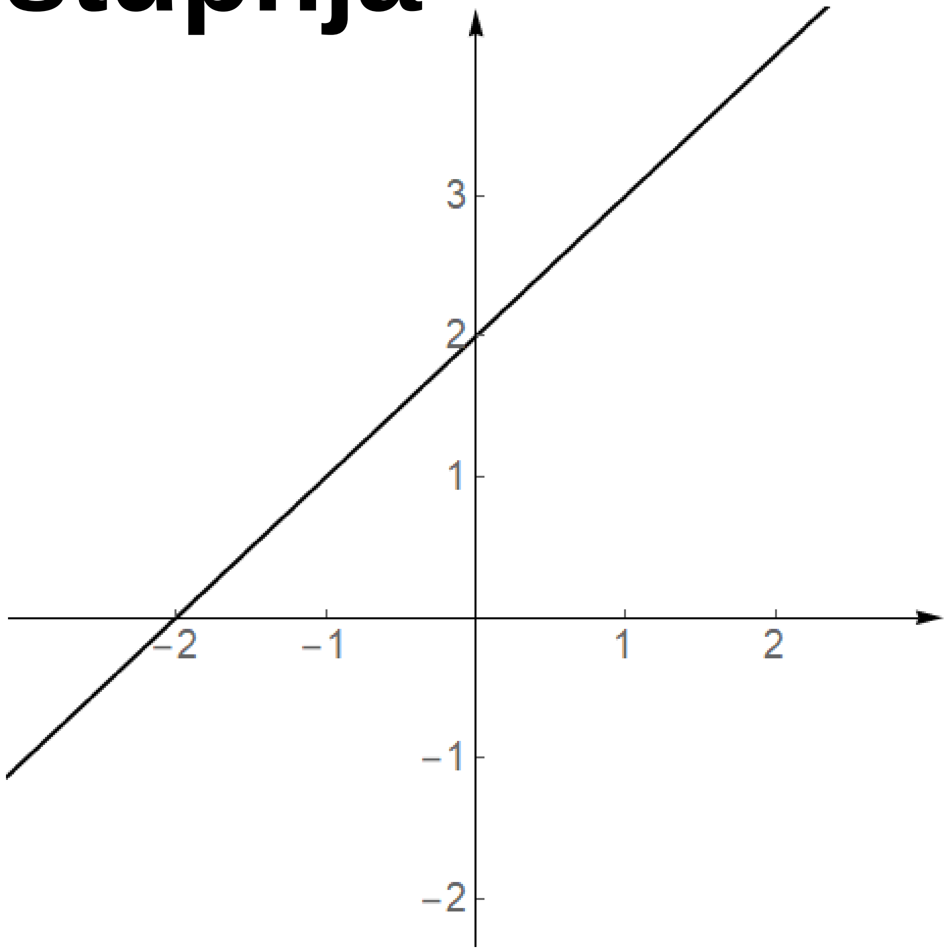
Uvjet: $a_1 \neq 0$

Drugi naziv: **linearna funkcija**

Drugi zapis: $y = kx + l$

Parametar k nazivamo **koeficijentom smjera** linearne funkcije (pravca).

Parametar l zovemo **odsječkom na osi ordinata**.



Pravac $y = x + 2$

Polinom prvog stupnja

Geogebra: https://www.geogebra.org/m/a9k6ww9r

Video materijali Tonija Miluna:

https://www.youtube.com/watch?v=YiZE6D6ghgM&list=PLF089B9DAE18467D4 (prva 3 videa)

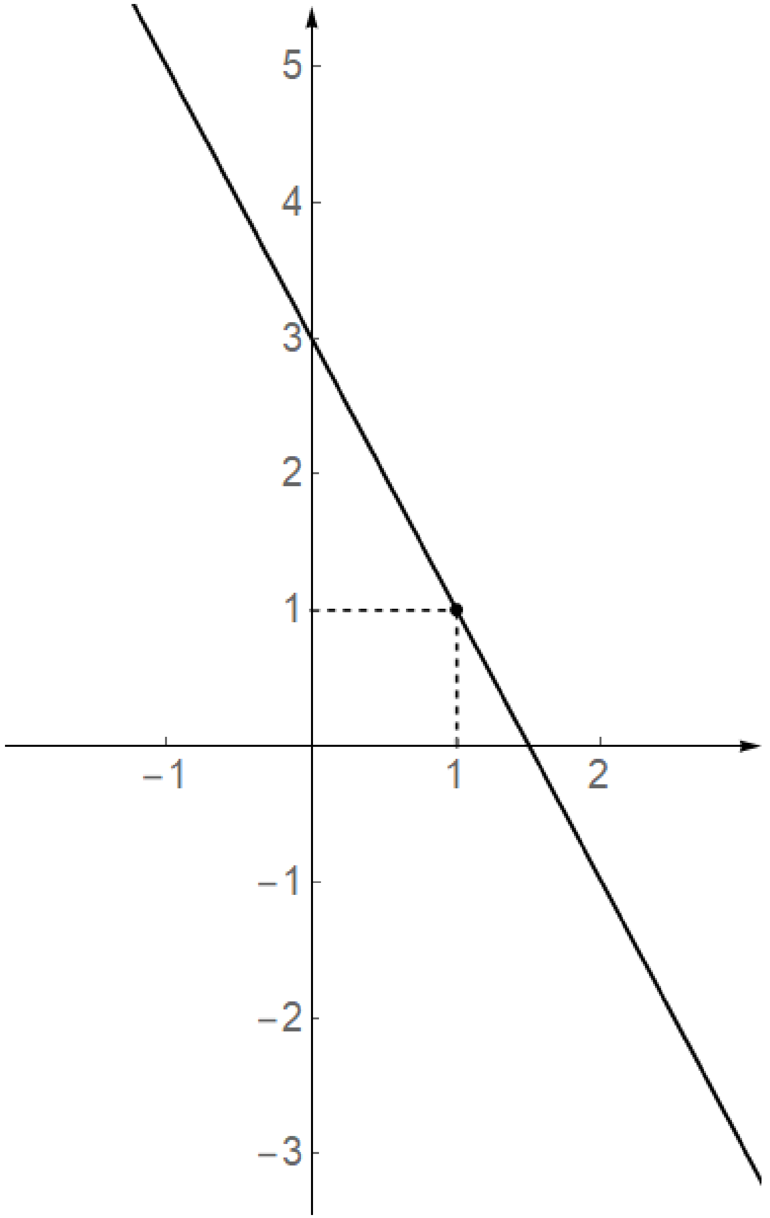
https://www.youtube.com/watch?v=mlwV1jyYyoI (1 video)

Polinom prvog stupnja

Jednadžba pravca kroz dvije točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

Ili čitanjem vrijednosti k i l neposredno s grafa
(ako su vrijednosti „okrugle”).



Kako glasi jednadžba polinoma čiji je graf prikazan na slici?

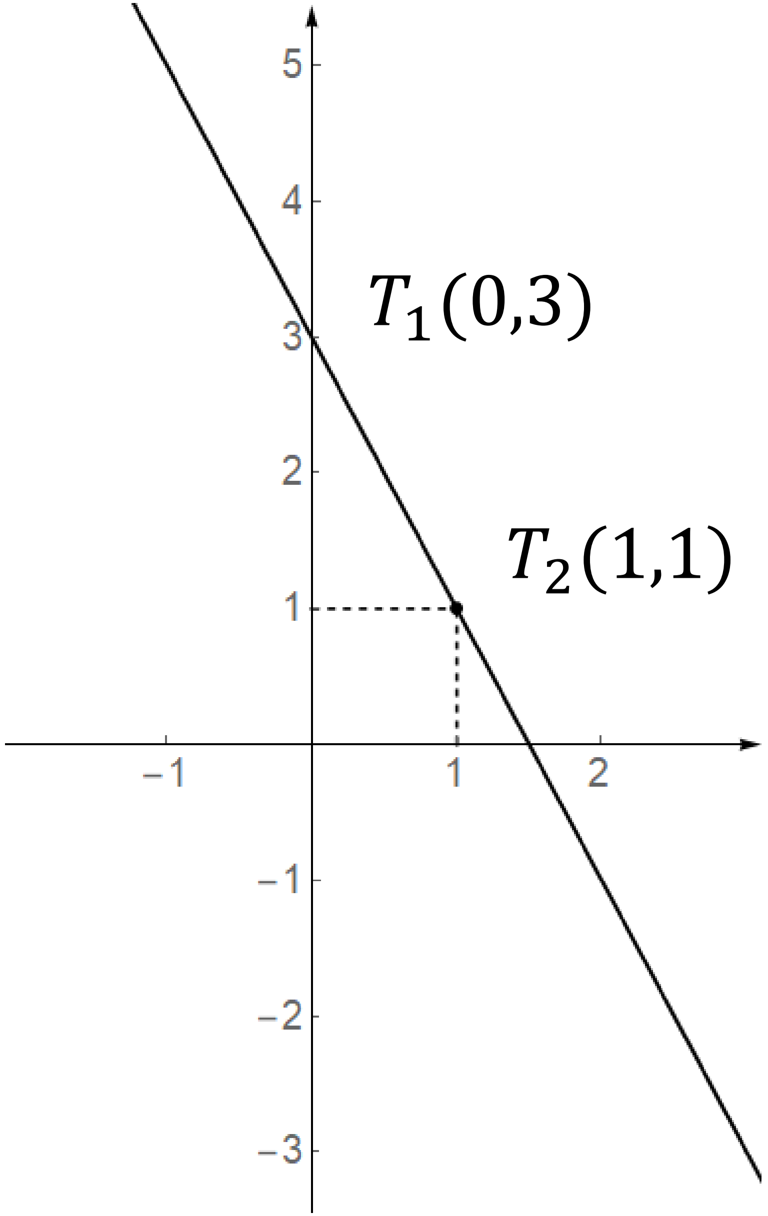
Odredite koeficijente te linearne funkcije

$f(x) = \boxed{} \cdot x + \boxed{}$

Uputa:
- broj unosite zajedno s predznakom
- ako broj nije cijeli, unosite ga u decimalnom zapisu

1. način – pomoću jednadžbe pravca kroz dvije točke:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



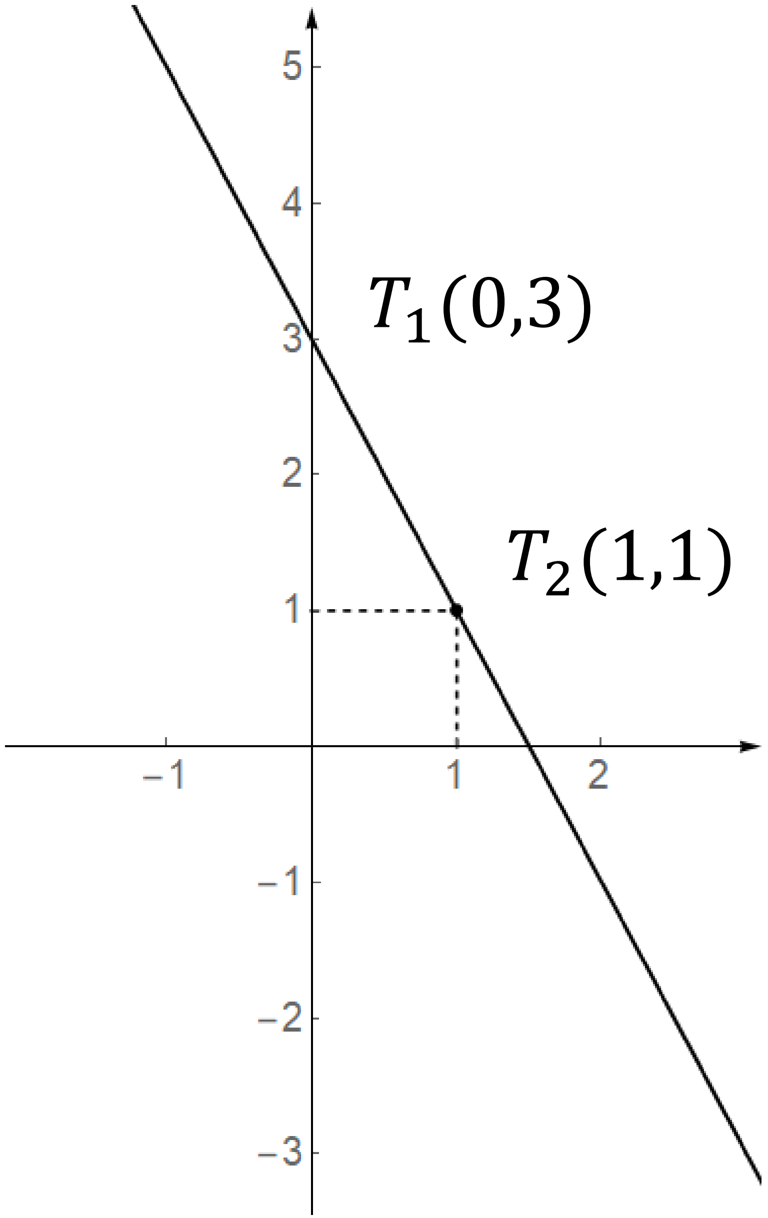
Odredimo dvije točke:

$$T_1(0{,}3) \qquad T_2(1{,}1)$$
$$(x_1, y_1) \qquad (x_2, y_2)$$

$$y - 3 = \frac{1-3}{1-0}\,(x - 0)$$

1. način – pomoću jednadžbe pravca kroz dvije točke:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$



Odredimo dvije točke:

$$T_1(0,3) \qquad T_2(1,1)$$
$$(x_1, y_1) \qquad (x_2, y_2)$$

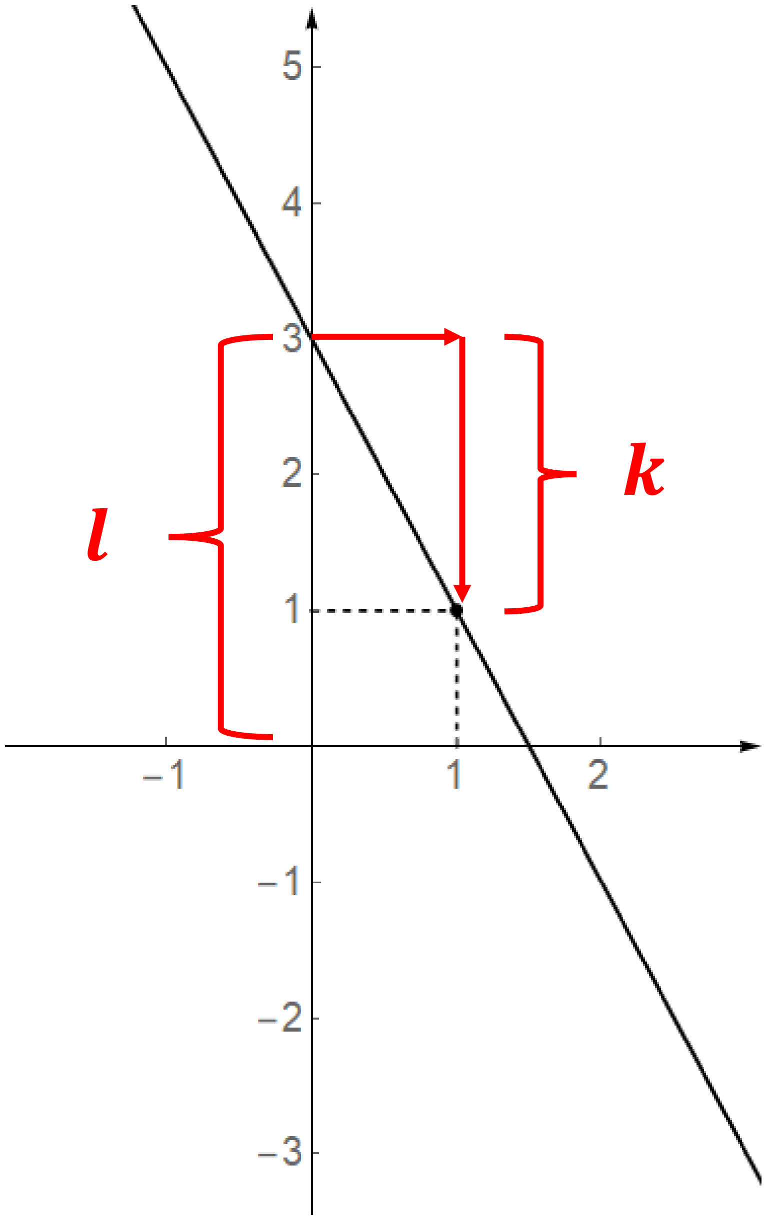
$$y - 3 = \frac{1-3}{1-0}(x - 0)$$

$$y - 3 = -2x \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 3$$

Odredite koeficijente te linearne funkcije

$f(x) = \boxed{-2} \cdot x + \boxed{3}$

Uputa:
- broj unosite zajedno s predznakom
- ako broj nije cijeli, unosite ga u decimalnom zapisu



Kako glasi jednadžba polinoma čiji je graf prikazan na slici?

2. način – čitanjem vrijednosti k i l neposredno s grafa:

$$l = 3 \qquad\qquad k = -2$$

Odredite koeficijente te linearne funkcije

$f(x) = \boxed{-2} \cdot x + \boxed{3}$

Uputa:
- broj unosite zajedno s predznakom
- ako broj nije cijeli, unosite ga u decimalnom zapisu

Polinom drugog stupnja

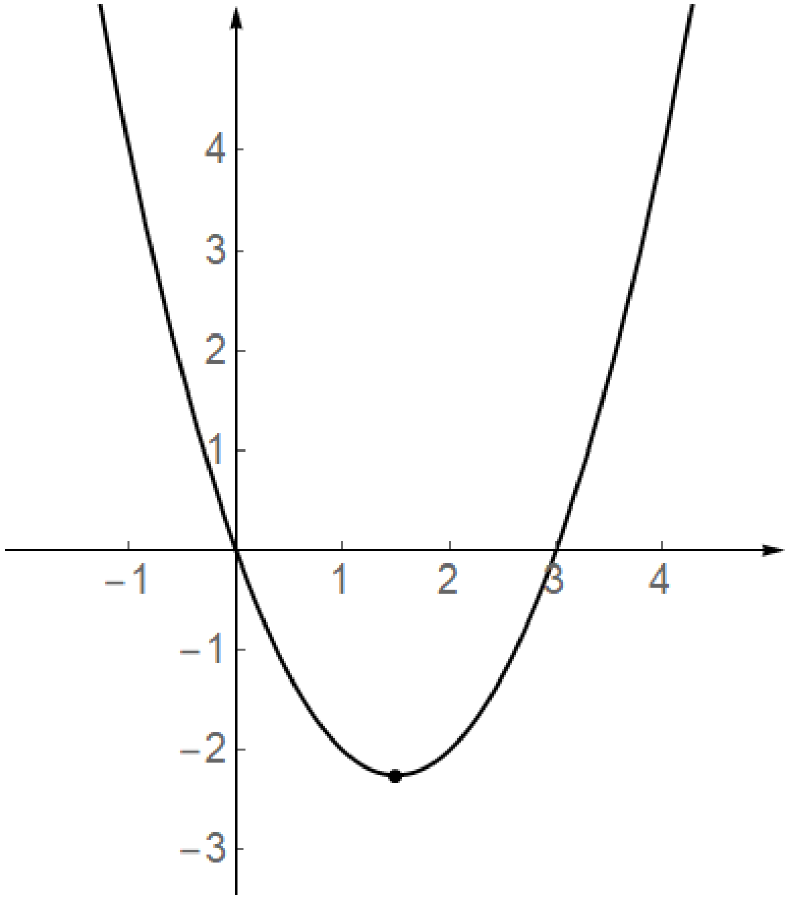
Polinom oblika $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ nazivamo polinomom drugog stupnja.

Uvjet: $a_2 \neq 0$

Naziv grafa: **parabola**

Drugi zapis: $y = ax^2 + bx + c$

Parabolu crtamo pomoću dva ključna elementa: nultočki i tjemena.



Polinom drugog stupnja

Nultočke kvadratne funkcije:.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Koordinate tjemena:

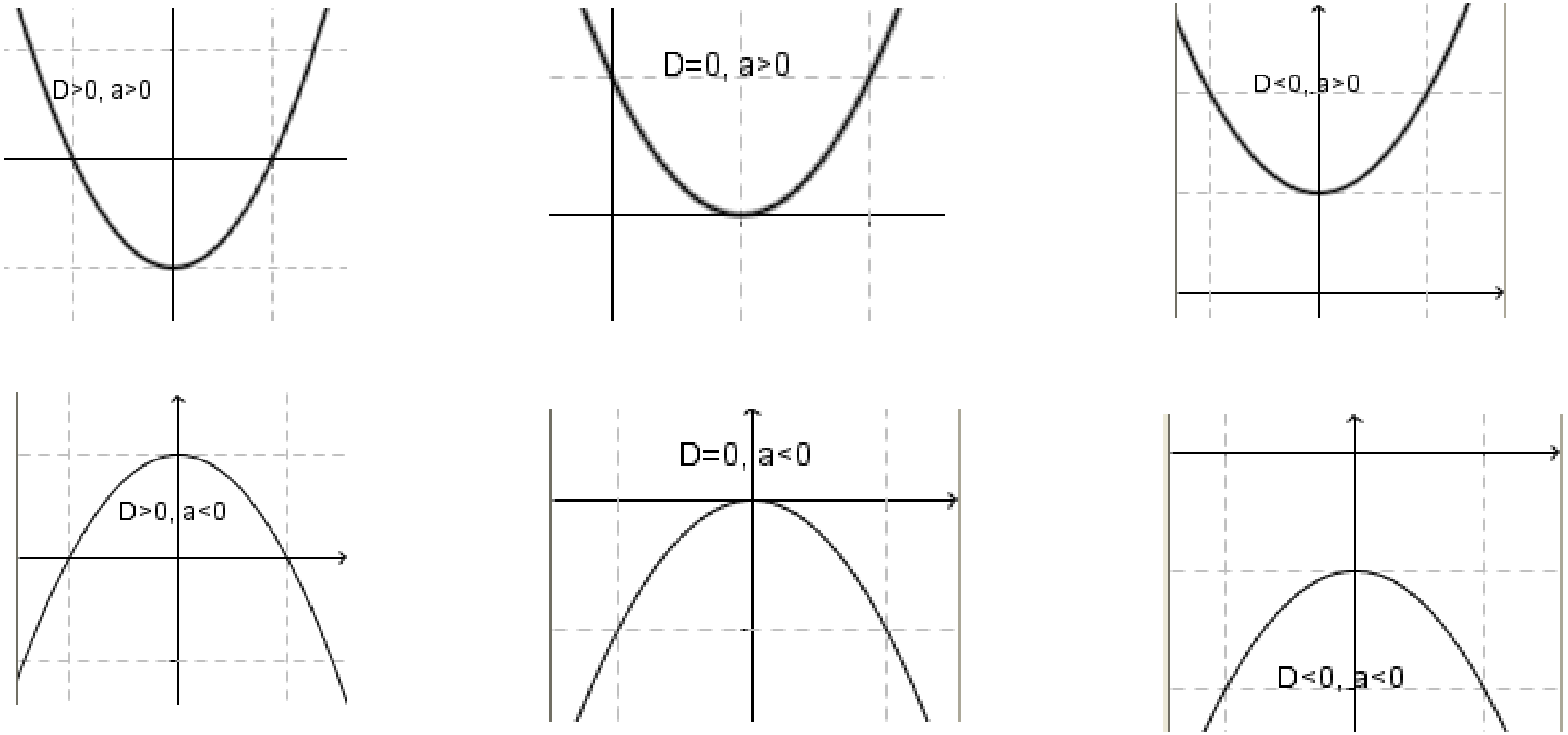
$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Diskriminanta kvadratne funkcije:

$$D = b^2 - 4ac$$

O diskriminanti ovisi koliko će kvadratna funkcija imati nultočki: niti jednu, jednu ili dvije.

Polinom drugog stupnja



Polinom drugog stupnja

Geogebra: https://www.geogebra.org/m/GfTkp7Pe

Video materijali Tonija Miluna:

https://www.youtube.com/watch?v=SL5F8eZVzPE&list=PLXygsnSpBk5Q90Vg6fKKPDCI7PzN6WVjC (prva 4 videa)

Polinom drugog stupnja

Skicirajte graf funkcije

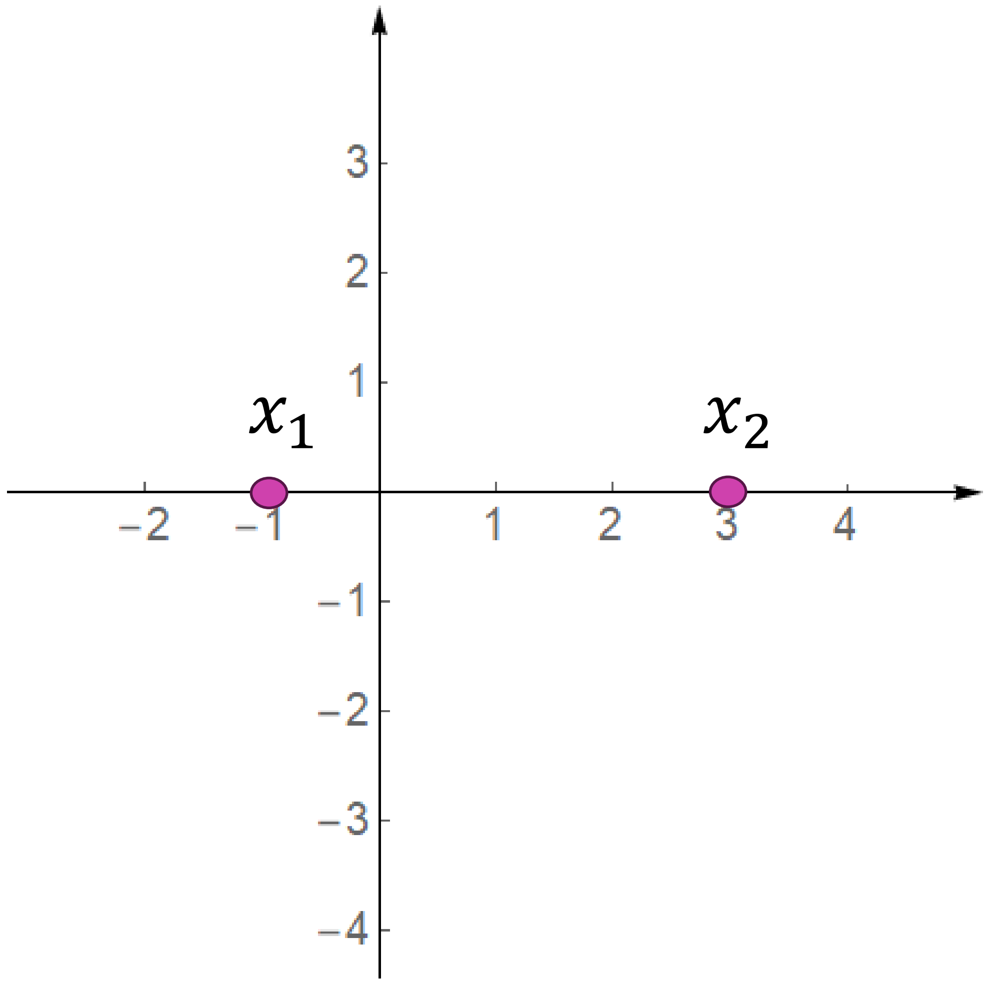
$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Označite nultočke i tjeme.

Nultočke:

$$x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x_1 = \frac{6}{2} = 3$$



Polinom drugog stupnja

Skicirajte graf funkcije

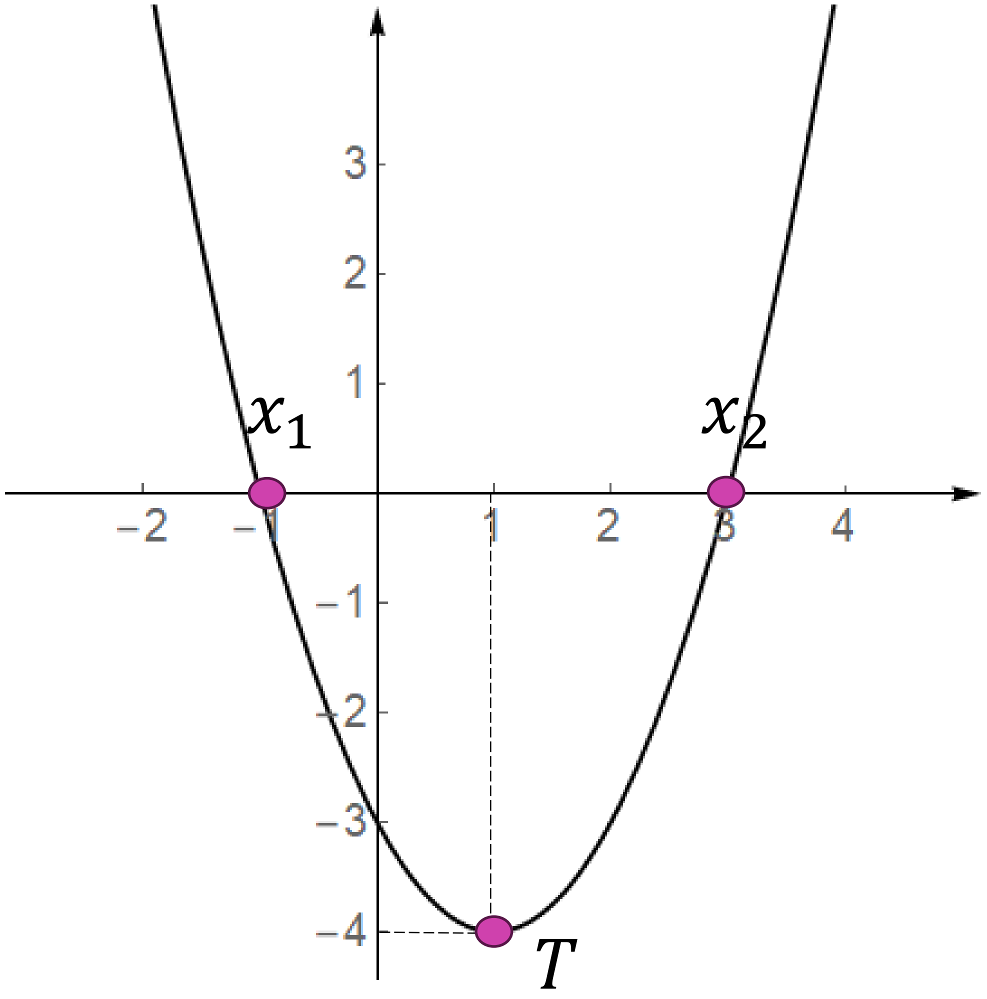
$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Označite nultočke i tjeme.

Tjeme:

$$T = \left(\frac{2}{2}, \frac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - 4}{4}\right)$$

$$T = \left(1, \frac{-16}{4}\right) = (1, -4)$$



Polinom drugog stupnja

Skicirajte graf funkcije

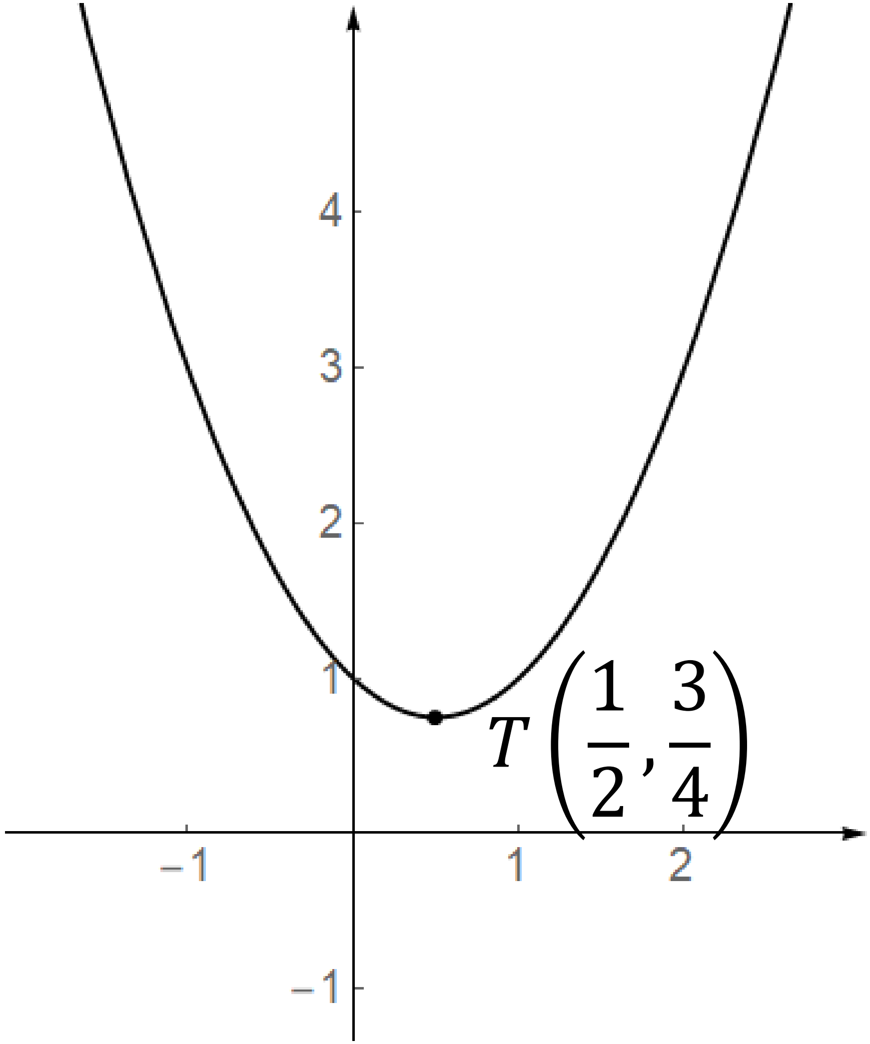
$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

Označite nultočke i tjeme.

Nema realnih nultočki.

Tjeme: $T\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

Dodatna točka: $T_1(0,1)$



Polinom drugog stupnja

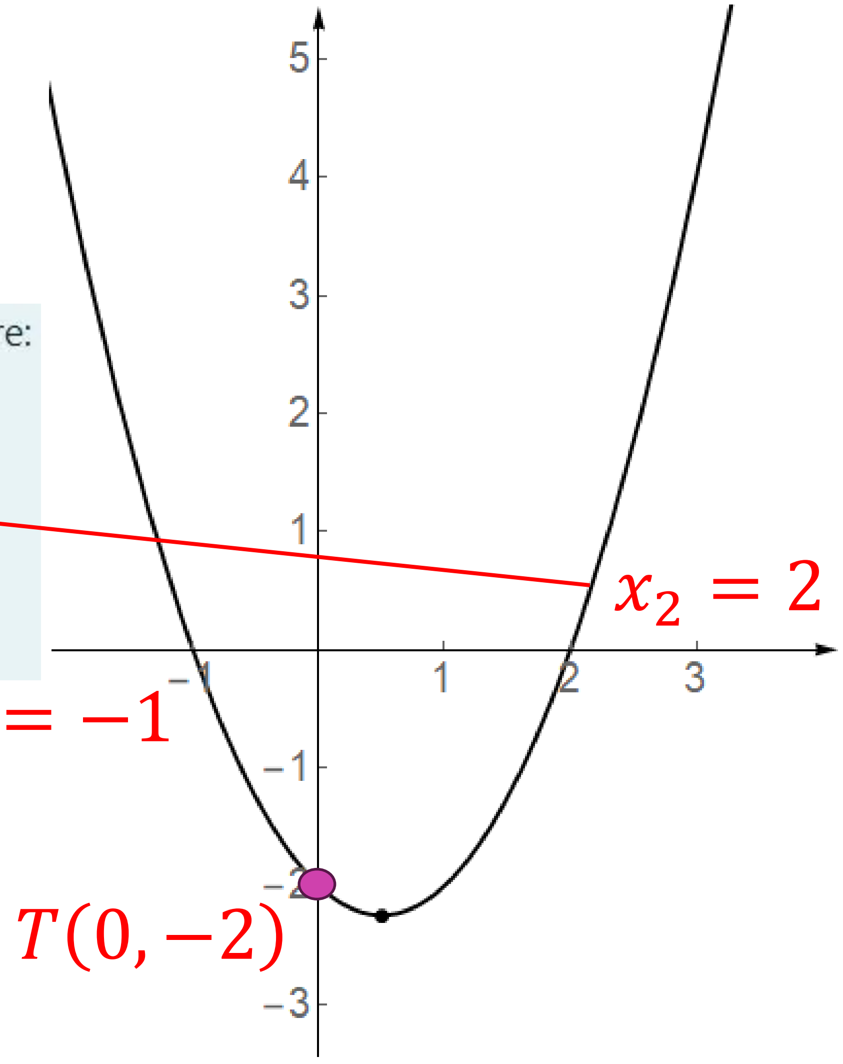
Obrnuto, kako odrediti kvadratnu funkciju ako je zadan njezin graf?

Odredite koeficijente te kvadratne funkcije zapisane pomoću Osnovnog teorema algebre:

$f(x) = \boxed{a} \cdot (x - \boxed{-1}) \cdot (x - \boxed{2})$

Uputa:

- broj unosite zajedno s predznakom
- ako broj nije cijeli, unosite ga u decimalnom zapisu



Za određivanje nepoznatog koeficijenta a treba nam još jedna točka!

Polinom drugog stupnja

Obrnuto, kako odrediti kvadratnu funkciju ako je zadan njezin graf?

Odredite koeficijente te kvadratne funkcije zapisane pomoću Osnovnog teorema algebre:

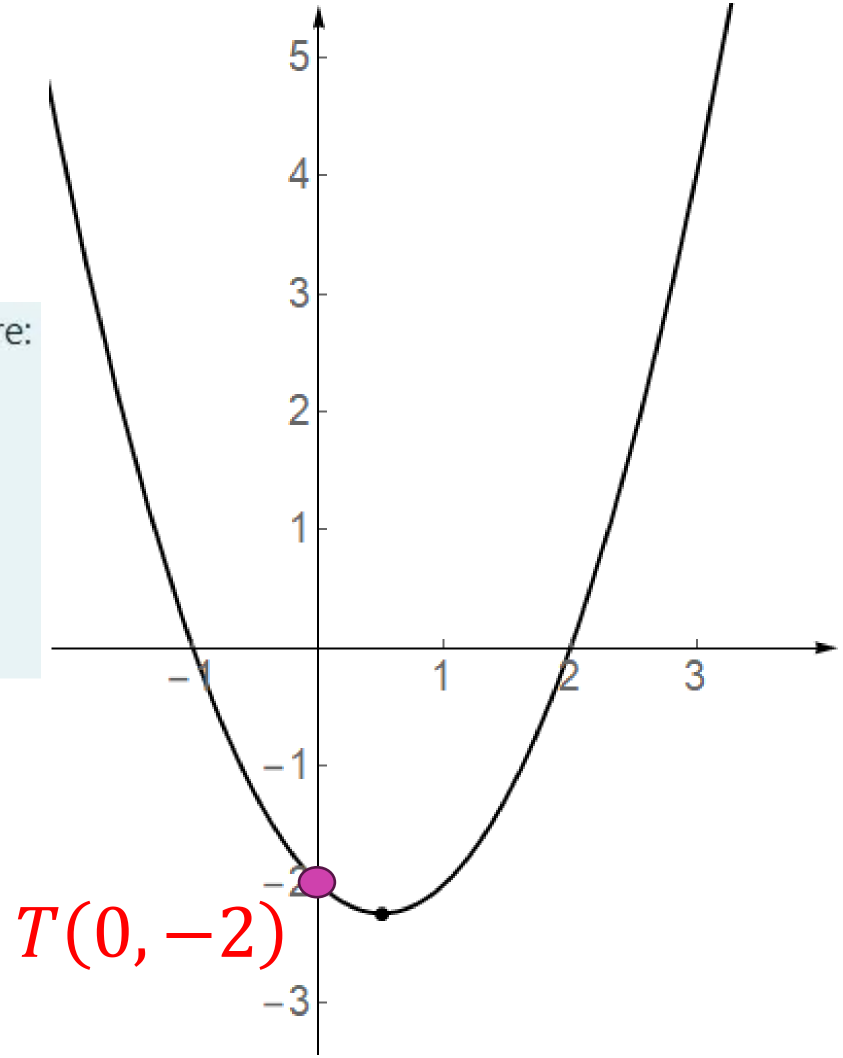
$f(x) = \boxed{a\ 1} \cdot (x - \boxed{-1}) \cdot (x - \boxed{2})$

Uputa:
- broj unosite zajedno s predznakom
- ako broj nije cijeli, unosite ga u decimalnom zapisu

$$y = a \cdot (x+1) \cdot (x-2)$$

$$-2 = a \cdot (0+1) \cdot (0-2)$$

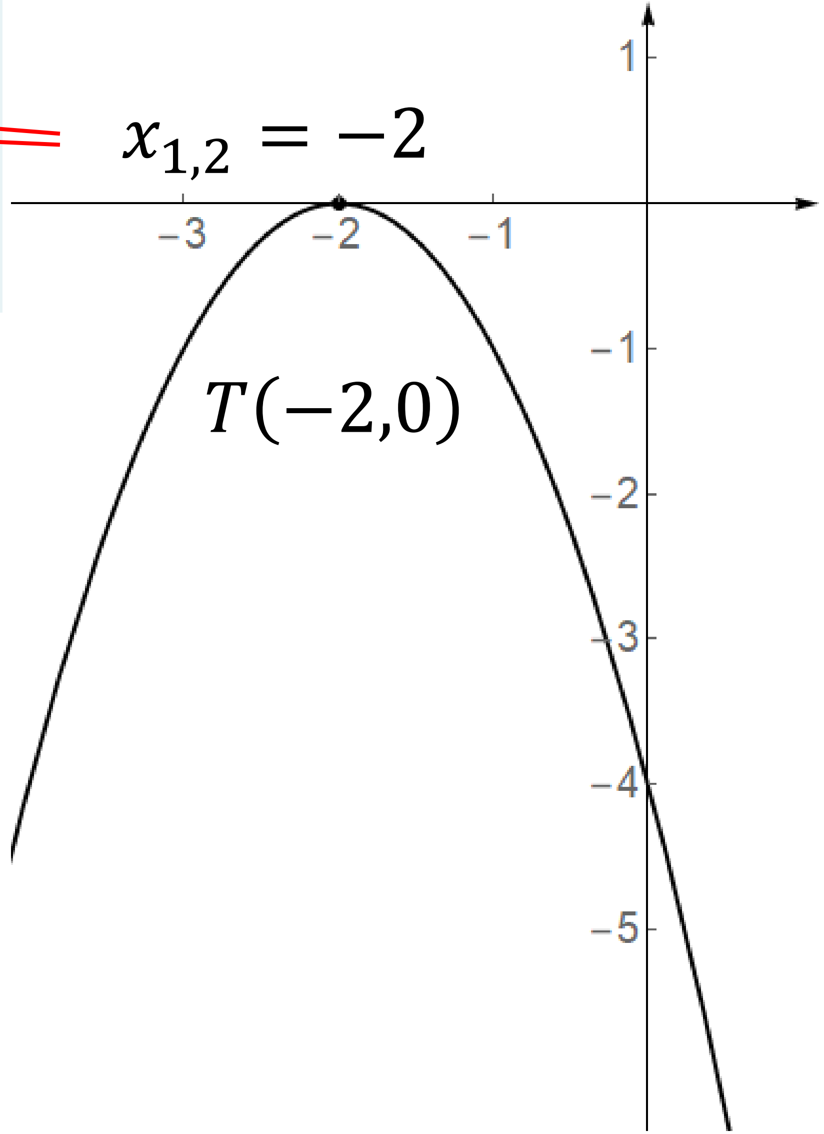
$$-2 = a \cdot (-2) \qquad \Rightarrow \qquad a = 1$$



Odredite koeficijente te kvadratne funkcije zapisane pomoću Osnovnog teorema algebre:

$f(x) = \boxed{a} \cdot (x - \boxed{-2}) \cdot (x - \boxed{-2})$

Uputa:
- broj unosite zajedno s predznakom
- ako broj nije cijeli, unosite ga u decimalnom zapisu



Ovoga puta imamo samo jednu nultočku.

Takva nultočka se naziva *dvostrukom* nultočkom i **dva puta** ju uvrštavamo u faktorizirani oblik kvadratne jednadžbe!

Nepoznati koeficjent a računamo kao i u prethodnom primjeru.

Odredite koeficijente te kvadratne funkcije zapisane pomoću Osnovnog teorema algebre:

$$f(x) = \boxed{-1} \cdot (x - \boxed{-2}) \cdot (x - \boxed{-2})$$

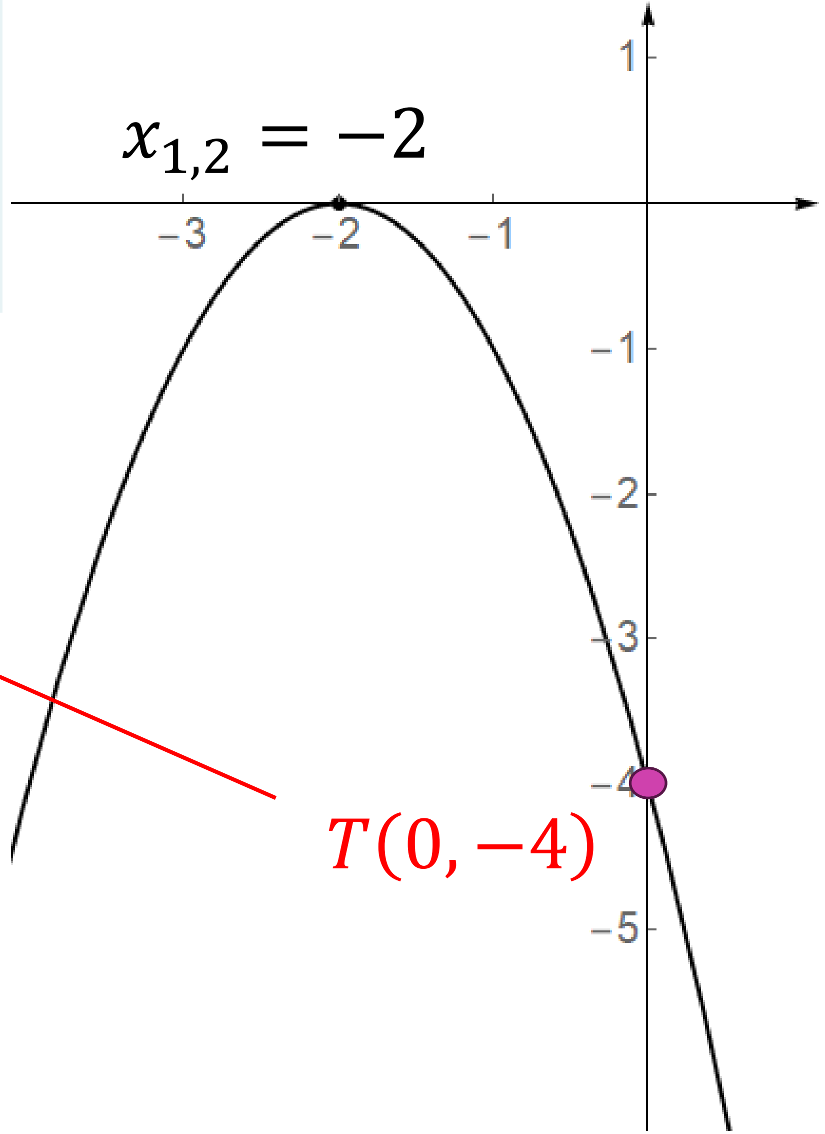
Uputa:
- broj unosite zajedno s predznakom
- ako broj nije cijeli, unosite ga u decimalnom zapisu

$$y = a \cdot (x+2) \cdot (x+2)$$

$$-4 = a \cdot (0+2) \cdot (0+2)$$

$$-4 = a \cdot 4$$

$$a = -1$$



Polinom trećeg stupnja

Polinom $p(x) = a_3x^3 + a_2\, x^2 + a_1x + a_0$ nazivamo polinomom trećeg stupnja.

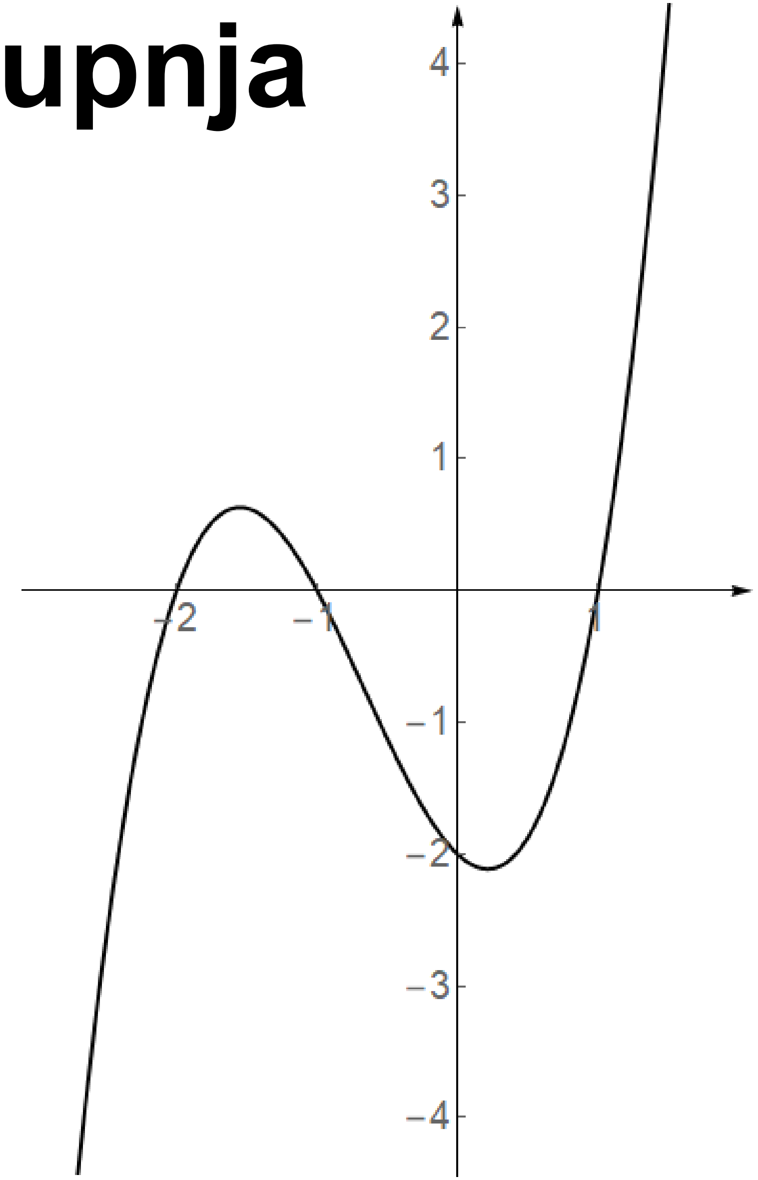
Uvjet: $a_3 \neq 0$

Kubna funkcija.

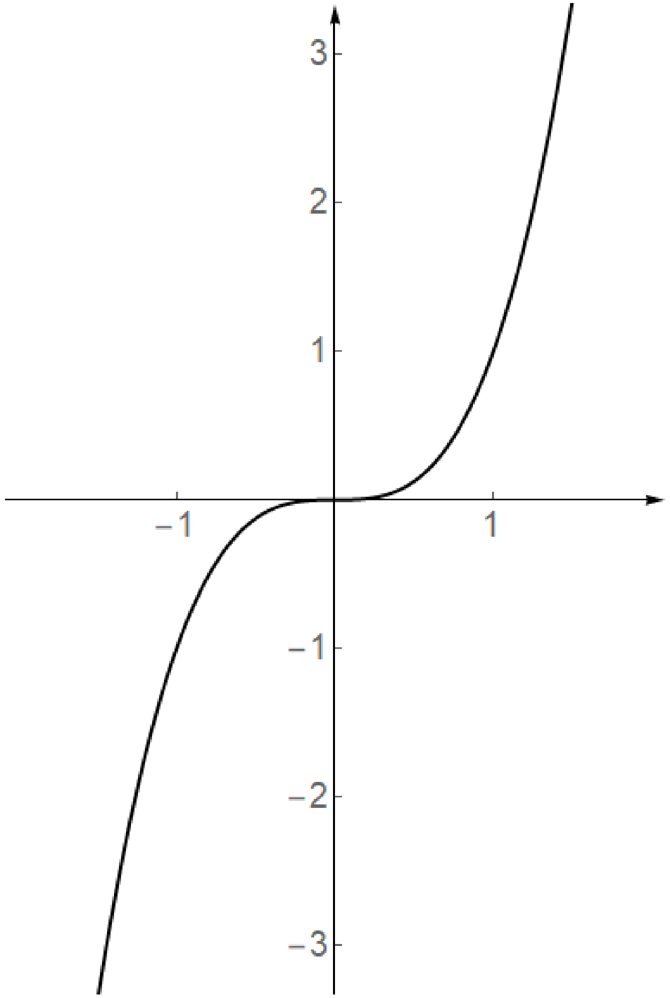
Kubna funkcija maksimalno može imati tri realne nultočke.

$$y = (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$$

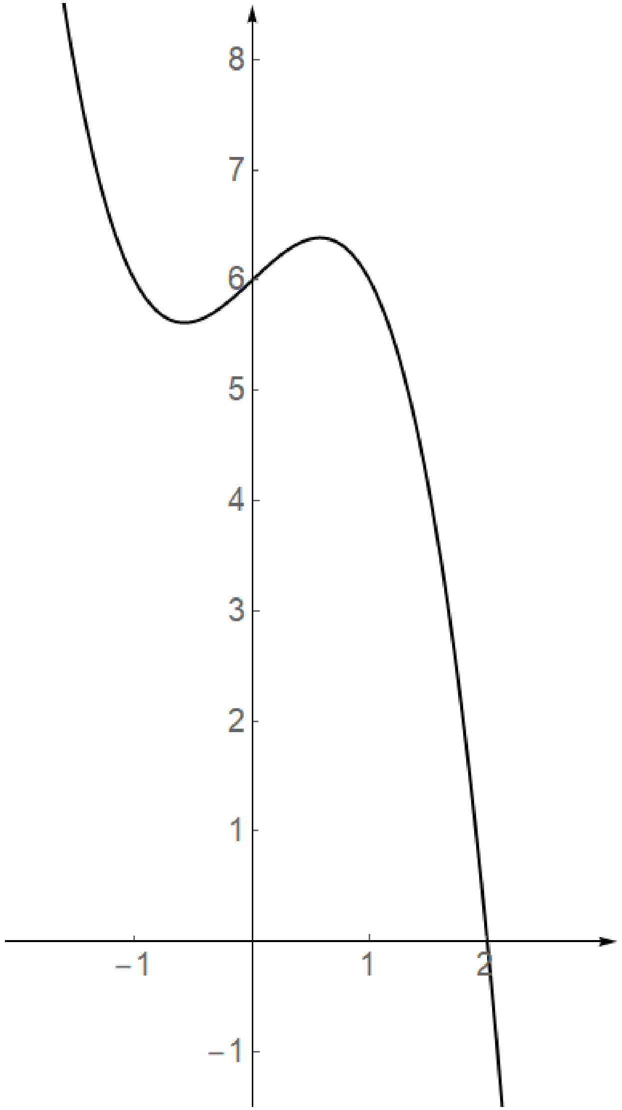
$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2$$



Kubna funkcija s jednom nultočkom:

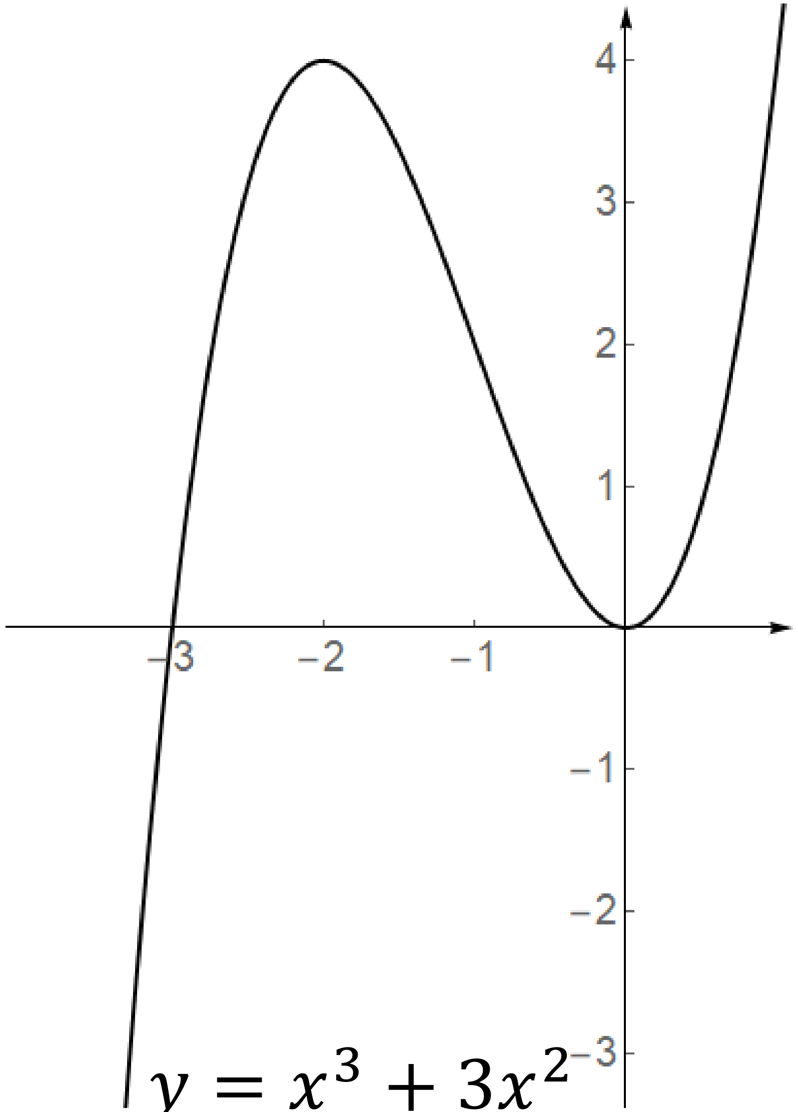


$$y = x^3$$

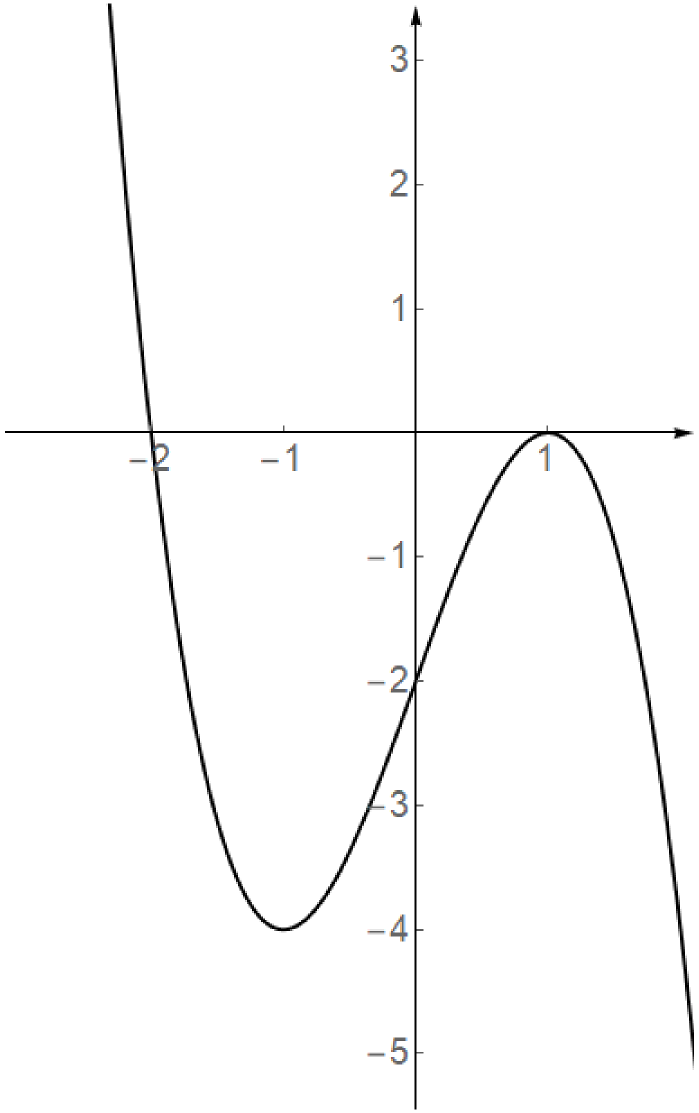


$$y = -x^3 + x + 6$$

Kubna funkcija s dvije nultočke:



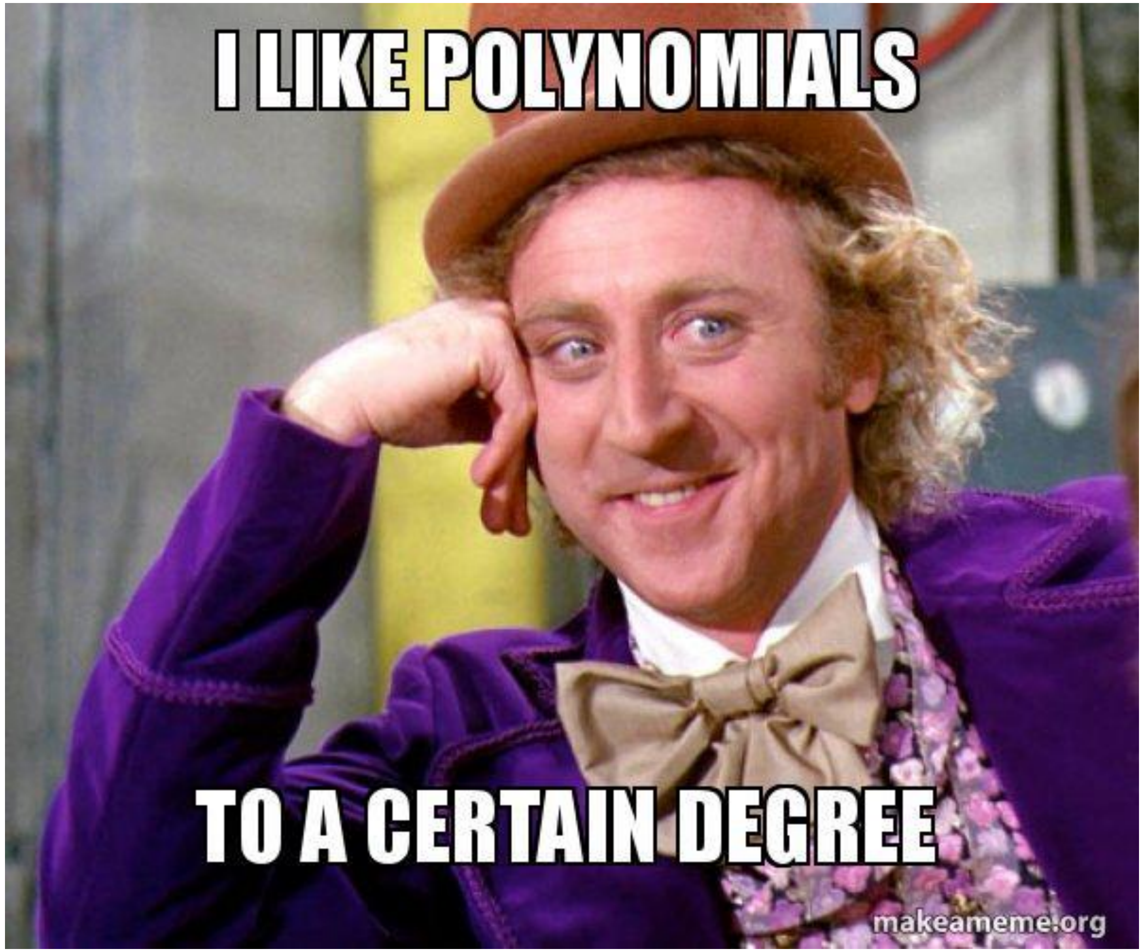
$$y = x^3 + 3x^2$$



$$y = -x^3 + 3x - 2$$

Geogebra: https://www.geogebra.org/m/Uz8GPat3

Kviz: https://tinyurl.com/y529vyt3



Hvala na pažnji!

☺