MATEMATIKA

Ogledni primjer ispita

Bodovi i vrijeme pisanja po ishodu:

Ishod	I1	I2	I3	I4	UKUPNO
Bodovi	20	20	20	20	80
Vrijeme pisanja	45 minuta	45 minuta	45 minuta	45 minuta	180 minuta

UPUTE:

- Na ispitu je dozvoljeno korištenje kalkulatora.
- Na papiru koji ste dobili od čuvar(ic)a, napišite svoje ime i prezime te grupu (Grupa 1). Odgovore i postupak pišite na dodatni papir redom kojim su postavljeni zadaci, uz naznaku ishoda i zadatka na koji odgovarate. Ako pišete na više papira, obavezno se potpišite na sve papire! **Nepotpisani papiri / ispiti se neće pregledati!**

Ishod učenja 1 – 20 bodova / 45 minuta

1. **[I1_M, 2 boda]** Pomnožite i podijelite polinome $f(x)$ i $g(x)$:

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 2, \quad g(x) = x^2 - 2.$$

2. **[I1_M, 1 bod]** Označite bitne elemente i skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$.

3. **[I1_M, 1 bod]** Označite bitne elemente i skicirajte graf funkcije $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

4. **[I1_M, 1 bod]** Riješite nejednadžbu: $x(x-3) \leq (x+1)^2$.

5. **[I1_M, 2 boda]** Riješite nejednadžbu: $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

6. **[I1_Ž, 2 boda]** Riješite nejednadžbu: $\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} \geq 0$.

7. **[I1_Ž, 2 boda]** Odredite domenu i nultočke funkcije $f(x) = \frac{2-\log x}{x}$.

8. **[I1_M, 2 boda]** Odredite domenu i nultočke funkcije $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$.

9. **[I1_Ž, 2 boda]** Riješite jednadžbu

$$10^x \cdot e^{x-1} = 1000.$$

Rješenje iskažite pomoću dekadskog logaritma, te kao broj u decimalnom zapisu zaokružen na dvije decimale.

10. **[I1_Ž, 2 boda]** Riješite jednadžbu

$$\ln(e \cdot x - 2\,e^2) = 2.$$

Rješenje iskažite kao broj u decimalnom zapisu zaokružen na dvije decimale. Obavezan postupak!

11. **[I1_M, 3 boda]** Odredite preostale stranice i kutove pravokutnog trokuta kojemu je jedna kateta jednaka $b = 5$, te njoj priležeći kut jednak $\alpha = 35°$. Rješenja iskažite kao brojeve u decimalnom zapisu zaokružene na dvije decimale.

Ishod učenja 2 – 20 bodova / 45 minuta

1. **[I2_M, 2 boda]** Zadane su funkcije $f(x) = \frac{x}{x+1}$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Odredite $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$. Pojednostavite zapis dobivenih kompozicija. Izračunajte $(f \circ g)(2)$ i $(g \circ f)(3)$. Rješenja zapišite kao razlomke.

2. **[I2_M, 3 boda]** Odredite inverz funkcije:
$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$
Rješenje provjerite kompozicijom.

3. **[I2_Ž, 3 boda]** Za funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \frac{1}{1+x}$ pronađite rješenja jednadžbe
$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{4}.$$

4. **[I2_M, 1 bod]** Zadani su skupovi $A = \{a, b\}$ i $B = \big\{\emptyset, \emptyset\big\}$. Koliko iznosi kardinalni broj skupa A, a koliko kardinalni broj skupa B?

5. **[I2_Ž, 1 bod]** Zadan je skup $S = \big\{\emptyset, a\big\}$. Odredite partitivni skup $\mathcal{P}(S)$.

6. **[I2_Ž, 1 bod]** Zadani su skupovi $A = \{a, \emptyset\}$ i $B = \{b, \emptyset\}$. Odredite Kartezijev produkt $B \times A$.

7. **[I2_M, 1 bod]** Zadani skupovi $A = \langle -4, 4\rangle$, $B = [0, 4]$, $C = \{-4, 0, 3, 4\}$. Odredite $(A \backslash C) \cap B$.

8. **[I2_Ž, 1 bod]** Pomoću Vennovog dijagrama prikažite skup $(A \cap B)^c$.

9. **[I2_M, 1 bod]** Odredite 5. član niza ako je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = n - a_{n-1}$.

10. **[I2_M, 3 boda]** Za aritmetički niz vrijedi:
$$a_1 \cdot a_2 = -2, \quad a_1 + a_2 = 1, \quad a_1 < 0.$$
Odredite zbroj prvih jedanaest članova tog niza.

11. **[I2_Ž, 3 boda]** Odredite peti član geometrijskog niza za kojeg vrijedi:
$$a_1, q > 0, \quad a_4 \cdot a_1 = 1, \quad a_3 = 2\,a_2.$$

Ishod učenja 3 – 20 bodova / 45 minuta

1. **[I3_M, 2 boda]** Zadane su matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Riješite matričnu jednadžbu: $2X + 3I = A \cdot B^T$.

2. **[I3_Ž, 3 boda]** Zadane su matrice: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
   Riješite matričnu jednadžbu: $A^T \cdot X + B = I$.

3. **[I3_M, 3 boda]** Gaussovom metodom riješite sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & - & y & - & z & = & -\frac{1}{2} \end{array}$$

4. **[I3_Ž, 3 boda]** Odredite, ako postoji, inverz matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. **[I3_M, 3 boda]** Izračunajte vrijednost determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

6. **[I3_M, 1 bod]** Zadane su tri točke u prostoru: $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 2, -3)$, $C(1, -1, -2)$.
   Odredite vektore $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AC}$.

7. **[I3_M, 1 bod]** Zadani su vektori: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$. Izračunajte: $|2\,\vec{b} - \vec{a}|$.

8. **[I3_Ž, 2 boda]** Odredite kut između vektora $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

9. **[I3_Ž, 2 boda]** Za vektore $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ izračunajte $\vec{b} \times \vec{a}$.

ALGEBRA UNIVERSITY

Ishod učenja 4 – 20 bodova / 45 minuta

1. **[I4_M, 3 boda]** Odredite vektorsku jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(2,-1)$ paralelan je pravcu $y=-2x-1$.

2. **[I4_Ž, 3 boda]** U ravnini je zadana parabola $y=4-x^2$. Zapišite vektorsku jednadžbu te parabole. Skalirajte zadanu parabolu tako da su joj nultočke $x_{12}=\pm 3$ a da joj tjeme ostane u istoj točki. Skicirajte obje krivulje.

3. **[I4_Ž, 3 boda]** U ravnini je zadana pravac $\vec{r}=\begin{bmatrix} 1-2t \\ 2+t \end{bmatrix}$. Translatirajte taj pravac tako da prolazi točkom $T(-1,-1)$. Skicirajte oba pravca.

4. **[I4_M, 3 boda]** U ravnini je dana dužina, čiji su vrhovi točke $A(3,1)$ i $B(-1,2)$. Zapišite matricu rotacije ravnine za 55° u smjeru kazaljke na satu, te rotirajte zadanu dužinu. Rješenja iskažite u decimalnom zapisu zaokružena na dva decimalna mjesta. Skicirajte obje dužine u koordinatnoj ravnini.

5. **[I4_M, 3 boda]** Odredite presjek ravnina u prostoru zadanih općim jednadžbama:

$$2x-y-z-3=0 \quad \text{i} \quad -x+y+2z=2.$$

   Rješenje zapišite u vektorskom obliku.

6. **[I4_Ž, 3 boda]** Zadana su dva pravca u prostoru

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{0}, \qquad \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2},$$

   čiji je presjek točka $T(1,0,-1)$. Odredite vektore smjera tih pravaca. Odredite opću jednadžbu ravnine u kojoj leže ta dva pravca.

7. **[I4_M, 2 boda]** Odredite udaljenost između točke $T(2,-1,-2)$ i ravnine $2x+y-z=3$.

Formule

Kvadratna funkcija

Nultočke: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Tjeme: $T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Algebarski izrazi

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab - b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab - b^2)$

Potencije

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

Pravokutni trokut

$\sin\alpha = \frac{nasuprotna\ kateta}{hipotenuza}$

$\cos\alpha = \frac{prilezeca\ kateta}{hipotenuza}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{nasuprotna\ kateta}{prilezeca\ kateta}$

Logaritamska i eksponencijalna funkcija

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x$

$\log 10^x = x, \quad 10^{\log x} = x$

$\ln e^x = x, \quad e^{\ln x} = x$

$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$

Aritmetički niz

$a_n = a_{n-1} + d$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big)$

Geometrijski niz

$a_n = a_{n-1} \cdot q$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Domena funkcije

$\frac{g(x)}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq 0$

$\sqrt[2n]{f(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 0$

$\log_a f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$

Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Laplaceov razvoj:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

Sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$

Gauss-Jordanova metoda: elementarne transformacije nad redovima matrice:

$$[A|b] \sim \cdots \sim [I|b']$$

Inverz matrice

Gauss-Jordanova metoda: elementarne transformacije nad redovima matrice:

$$[A|I] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}]$$

Cramerova metoda:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left[A_{ij}\right]^T, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Vektori

Za točke $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$ vrijedi:
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

Za vektore $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$ vrijedi:

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

Geometrija ravnine

Pravac: $\vec{r} = \vec{r_A} + t \cdot \vec{s}$, gdje je $\vec{r_A}$ radij-vektor točke, a $\vec{s}$ vektor smjera.

Kružnica: $\vec{r} = \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{bmatrix}, \ t \in [0, 2\pi\rangle$.

Elipsa: $\vec{r} = \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{bmatrix}, \ t \in [0, 2\pi\rangle$.

Graf funkcije $y = f(x)$: $\vec{r} = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$.

Preslikavanja ravnine

Translacija za vektor $\vec{t}$: $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{t}$.

Osna simetrija:
– s obzirom na x-os: $\vec{r'} = O_x \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{r}$.
– s obzirom na y-os: $\vec{r'} = O_y \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{r}$.

Rotacija za kut α:
$\vec{r'} = R \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \vec{r}$.

Skaliranje za faktore k_x i k_y duž koordinatnih osi:
$\vec{r'} = S \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \cdot \vec{r}$.

Geometrija prostora

Pravac, vektorska jednadžba: $\vec{r} = \vec{r_A} + t \cdot \vec{s}$
Kanonska jednadžba: $\frac{x - x_A}{s_x} = \frac{y - y_A}{s_y} = \frac{z - z_A}{s_z}$

Ravnina, vektorska jednadžba:
$\vec{r} = \vec{r_A} + u \cdot \vec{s_1} + v \cdot \vec{s_2}$
Opća jednadžba: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Normala ravnine je vektor okomit na tu ravninu.

$$\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Opća jednadžba ravnine koja prolazi točkom $T(x_0, y_0, z_0)$ i ima normalu $\vec{n}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

Udaljenost točke $T(x_0, y_0, z_0)$ do ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su okomiti ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su paralelni ako je $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.