Matematička analiza

Ishod 2

L'Hospitalovo pravilo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a) pravilo koristimo kod neodređenih oblika $\left[\frac{0}{0}\right]$ ili $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

b) kod oblika $[0 \cdot \infty]$ prelazimo na oblik (a) tako da jedan izraz prebacimo u nazivnik

c) oblik $[\infty - \infty]$ prelazi na oblik (a) svođenjem na zajednički nazivnik

d) oblici $[0^0]$, $[1^\infty]$ i $[\infty^0]$ prelaze na oblik (a) logaritmiranjem

L’Hospitalovo pravilo

5.1. Primjenom L’Hospitalovog pravila izračunajte:

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

c) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + 3x^4 - 2x - 2}{-x^4 - 7x^2 + 4x + 4}$$

L'Hospitalovo pravilo

5.2. Primjenom L'Hospitalovog pravila izračunajte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \ln x$

L'Hospitalovo pravilo

5.3. Primjenom L'Hospitalovog pravila izračunajte:

a) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

Tangenta i normala

Jednadžba pravca:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$ nagiba k, kroz točku $T(x_0, y_0)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$ kroz točke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$

Pravci su paralelni ako vrijedi $k_1 = k_2$.

Pravci su okomiti ako vrijedi $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Tangenta i normala

Tangenta na graf krivulje $f(x)$ u točki $T(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Normala na graf krivulje $f(x)$ u točki $T(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Tangenta i normala

5.4. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf zadane funkcije i skicirajte graf funkcije zajedno s dobivenom tangentom i normalom.

a) $f(x) = x^3$ u točki s apscisom $x_0 = -1$.

b) $f(x) = \ln x$ u nultočki funkcije.

c) $f(x) = e^x$ u presjecištu s osi ordinata.

Tangenta i normala

5.5. Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y = \sqrt{x - 2}$ u točki $D(6,2)$.

5.6. Odredite jednadžbe tangenti na krivulju $y = \frac{x+1}{x-1}$ koje su okomite na pravac $x - 2y - 3 = 0$.

5.7. U kojoj je točki normala na parabolu $y = x^2 - 7x + 3$ okomita na pravac $5x + y - 3 = 0$? Odredite jednadžbu te normale.

Tok funkcije

1. **Domena funkcije**

   određujemo područje na kojemu je funkcija definirana

2. **Nultočke funkcije**

   točke u kojima funkcija siječe x-os

- rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$
- odredimo rješenja $x_1, x_2, \ldots$
- nultočke su točke $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots$

Tok funkcije

3. Asimptote

ponašanje funkcije u rubovima domene

Horizontalna asimptota

- odredimo limes $x \to \pm\infty$
- ukoliko je taj limes jednak broju b, horizontalna asimptota je pravac $y = b$

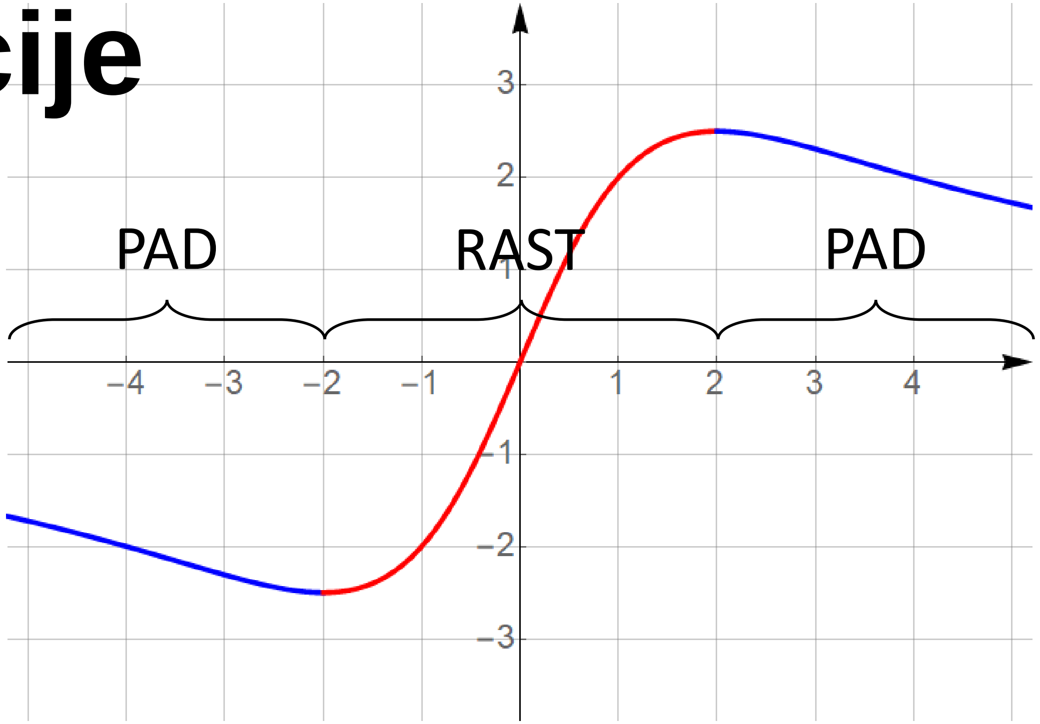
Vertikalna asimptota

- odredimo limes $x \to a$, gdje je a rub domene
- ukoliko je taj limes jednak $\pm\infty$, vertikalna asimptota je pravac $x = a$

Tok funkcije

4. Intervali monotonosti

područja rasta i pada funkcije



- odredimo $f'(x)$
- izračunamo stacionarne točke,

$$f'(x) = 0$$

- formiramo tablicu predznaka za $f'(x)$
- u tablicu stavljamo sve rubove domene i sve stacionarne točke

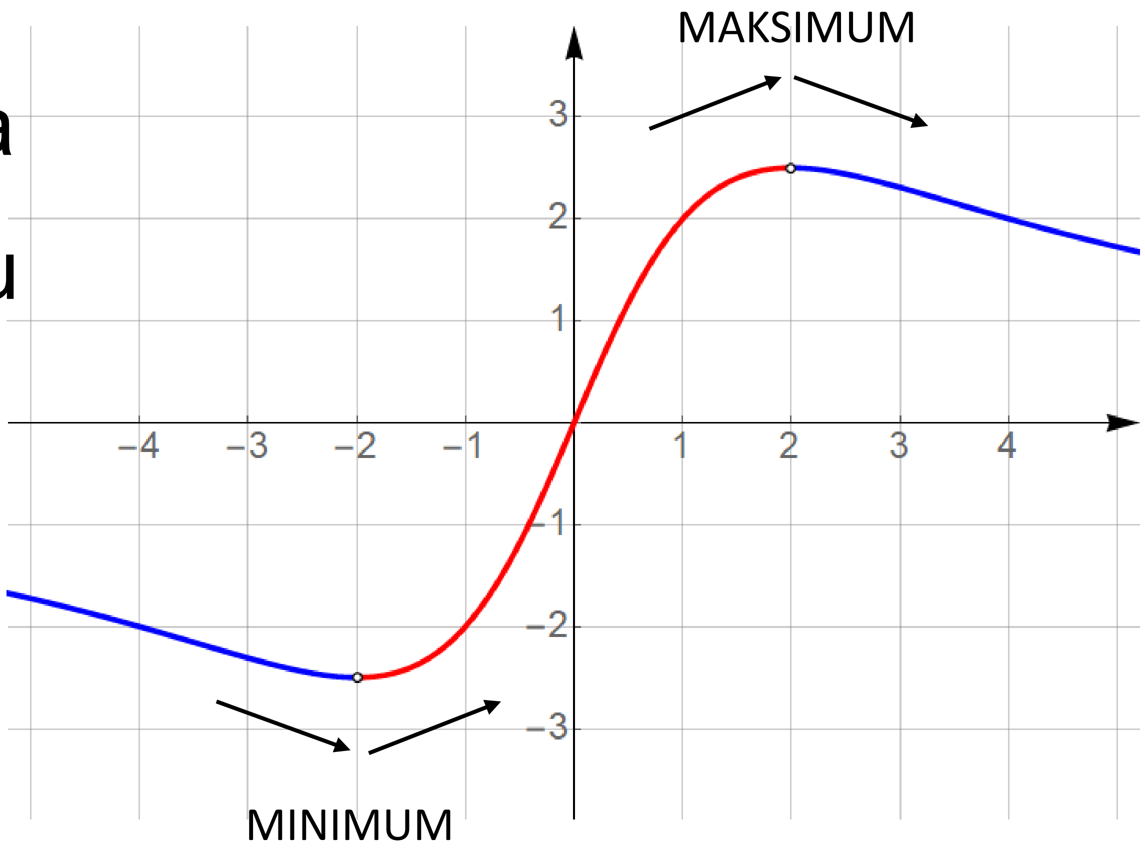
$$f'(x) > 0,\ \ f(x) \text{ raste}$$

$$f'(x) < 0,\ \ f(x) \text{ pada}$$

Tok funkcije

5. Lokalni ekstremi funkcije
točke minimuma i maksimuma

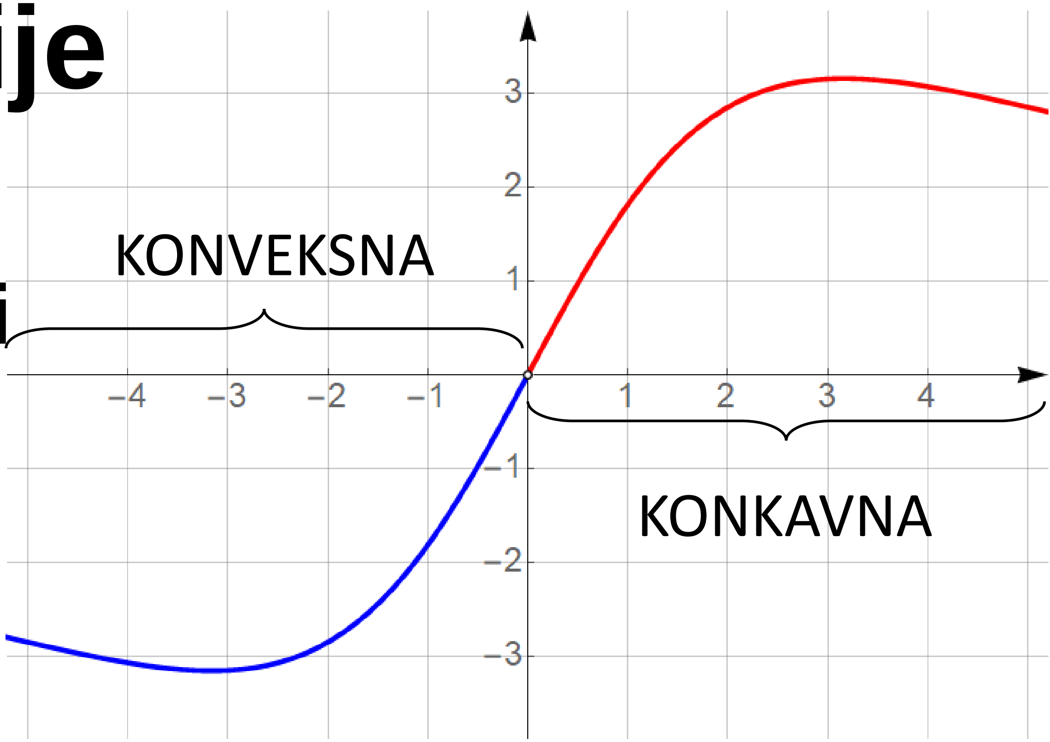
- kandidati za točke ekstrema su stacionarne točke
- iz tablice rasta i pada čitamo o kojem se ekstremu radi



↗ ↘	lokalni maksimum
↘ ↗	lokalni minimum

Tok funkcije

6. Intervali zakrivljenosti
područja konveksnosti i konkavnosti



- odredimo $f''(x)$
- izračunamo nultočke,

$$f''(x) = 0$$

- formiramo tablicu predznaka za $f''(x)$
- u tablicu stavljamo sve rubove domene i sve nultočke $f''(x)$

$f''(x) > 0$, konveksna

$f''(x) < 0$, konkavna

Tok funkcije

7. Točke infleksije

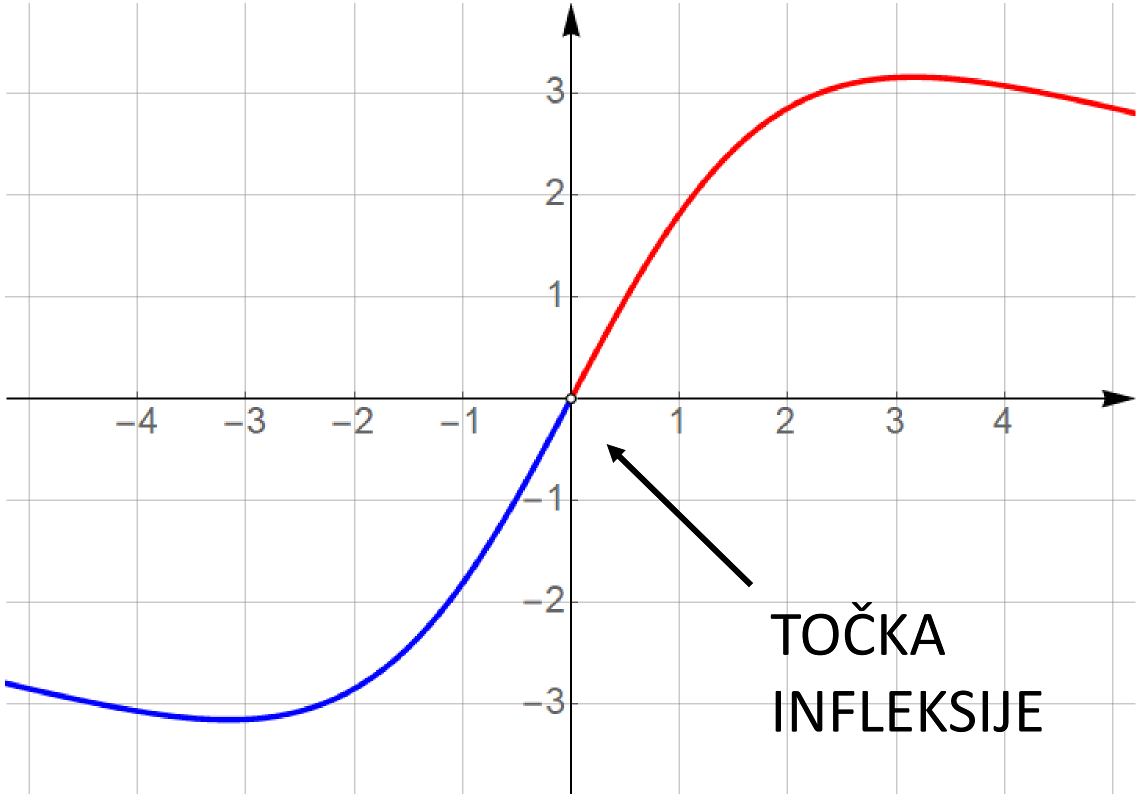
točke promjene zakrivljenosti

- kandidati za točke infleksije su nultočke $f''(x)$
- iz tablice zakrivljenosti čitamo radi li se o točki infleksije

$\cup \ \cap$

$\cap \ \cup$

točke infleksije



Tok funkcije

6.1. Odredite domenu, nultočke i asimptote funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Tok funkcije

6.2. Ispitajte tok i skicirajte graf slijedećih funkcija:

a) $f(x) = x^3 - 9x$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

Tok funkcije

6.3. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$, ako je $f'(x) = -\frac{2x+3}{x^4}$, $f''(x) = \frac{6x+12}{x^5}$.

6.4. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$, ako je $f'(x) = -\frac{12x}{(x^2+3)^2}$, $f''(x) = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^2}$.

Tok funkcije

7.1. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$, ako je $f'(x) = -\frac{8x}{(x^2-4)^2}$, $f''(x) = \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$.

7.2. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^3+2}$, ako je $f'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3+2)^2}$, $f''(x) = \frac{12x(x^3-1)}{(x^3+2)^3}$.

Tok funkcije

7.3. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$, ako je $f'(x) = \frac{1-x}{e^{x-1}}$, $f''(x) = \frac{x-2}{e^{x-1}}$.

7.4. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{e^x}{x}$, ako je $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $f''(x) = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$.

Tok funkcije

7.5. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = x \ln x$, ako je $f'(x) = 1 + \ln x$, $f''(x) = \frac{1}{x}$.

7.6. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, ako je $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$.

Prosječni troškovi

Promatramo funkciju ukupnih troškova, $T(Q)$.

- Q – količina proizvodnje
- $T(Q)$ – ukupni troškovi za proizvodnju količine Q
- sve ekonomske veličine nisu negativne, tj. $Q, T \geq 0$

Prosječni troškovi, $AT(Q)$ su funkcija koja opisuje veličinu troškova po jedinici proizvodnje. Drugi naziv – jedinični trošak.

$$AT(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$$

Granični troškovi

Promatramo funkciju ukupnih troškova, $T(Q)$.

- Q – količina proizvodnje
- $T(Q)$ – ukupni troškovi za proizvodnju količine Q
- sve ekonomske veličine nisu negativne, tj. $Q, T \geq 0$

Granični troškovi, $MT(Q)$ su funkcija koja opisuje brzinu rasta (ili pada) troškova na određenoj razini proizvodnje.

Drugi naziv – marginalni trošak.

$$MT(Q) = T'(Q)$$

Prosječni i granični troškovi

8.1. Zadana je funkcija ukupnih troškova $T(Q) = Q^2 + 10$.

a) Odredite funkciju prosječnih i funkciju graničnih troškova.
b) Odredite vrijednosti prosječnih i graničnih troškova na razinama proizvodnje $Q_1 = 2$, $Q_2 = 4$ i $Q_3 = 10$.
c) Na kojoj od navedenih razina proizvodnje troškovi najbrže rastu?
d) Na kojoj od navedenih razina proizvodnje je trošak po jedinici proizvoda najmanji?

Prosječni i granični troškovi

8.2. Zadana je funkcija ukupnih troškova $T(Q) = \frac{10\,Q^2+100}{Q}$.

a) Odredite funkciju prosječnih i funkciju graničnih troškova.
b) Odredite vrijednosti prosječnih i graničnih troškova na razinama proizvodnje $Q_1 = 2$ i $Q_2 = 5$.
c) Na kojoj od navedenih razina proizvodnje troškovi rastu, a na kojoj padaju?
d) Na kojoj od navedenih razina proizvodnje je trošak po jedinici proizvoda najveći?

Prosječni i granični troškovi

8.3. Zadana je funkcija prosječnih troškova

$$AT(Q) = Q^2 - 3Q - 24 + \frac{100}{Q}.$$

a) Odredite funkciju ukupnih i funkciju graničnih troškova.

b) Na kojoj razini proizvodnje su ukupni troškovi minimalni i koliko iznose takvi minimalni troškovi?

Koeficijent elastičnosti

Koeficijent elastičnosti funkcije $f(x)$:

$$E_{f,x} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Interpretacija elastičnosti:

Kada u točki x_o vrijednost varijable x raste za 1 %, tada vrijednost funkcije $f(x)$ raste (pada) za $\left|E_{f,x}(x_0)\right|$%.

Rast ili pad ovisi o predznaku koeficijenta elastičnosti.

Koeficijent elastičnosti

8.4. Odredite koeficijent elastičnosti zadane funkcije, te ga interpretirajte na zadanoj razini.

a) $f(x) = x^2 + 2x, \qquad x_0 = 2$

b) $T(Q) = \dfrac{Q+2}{Q+1}, \qquad Q_0 = 3$

c) $T(Q) = 100\, e^{-2Q}, \qquad Q_0 = 1$

Koeficijent elastičnosti

8.5. Zadana je funkcija potražnje $q(p)$ u ovisnosti o cijeni proizvoda p:

$$q(p) = \frac{1000}{\sqrt{p}}.$$

Izračunajte i interpretirajte koeficijent elastičnosti zadane funkcije potražnje.

Koeficijent elastičnosti

8.6. Zadana je funkcija cijene $p(q)$ u ovisnosti o količini proizvodnje, gdje je q količina iskazana u tonama:

$$p(q) = \frac{q}{e^q}.$$

Izračunajte i interpretirajte koeficijent elastičnosti zadane funkcije cijene na razinama $q_1 = 500\,kg$ i $q_2 = 2000\,kg$.

Hvala ☺