MATEMATIČKA ANALIZA

Neodređeni integral

Antiderivacija

Antideriviranje je postupak suprotan deriviranju.

Za zadanu funkciju $f(x)$, tražimo funkciju $F(x)$ koju trebamo derivirati kako bi dobili zadanu funkciju.

Koju funkciju treba derivirati kako bi dobili

$$f(x) = 2x + 1?$$

Trebamo derivirati funkciju

$$F(x) = x^2 + x$$

Antiderivacija

Pokušajmo prepoznati uzorak koji se pojavljuje u tom procesu prilikom određivanja antiderivacije za potencije.

$$f(x) = x \qquad \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = x^2 \qquad \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = x^n \qquad \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Antiderivacija

Time smo zapravo odredili pravilo za antiderivaciju (skoro svake) potencije:

$$f(x) = x^n \qquad \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Provjerimo dobiveno pravilo i odredimo $F'(x)$:

$$F'(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)\cdot x^n}{n+1} = x^n$$

Antiderivacija

Sada možemo lako odrediti antiderivaciju funkcije

$$f(x) = x^9$$

$$F(x) = \frac{x^{10}}{10}$$

No, je li to jedino rješenje?

$$F(x) = \frac{x^{10}}{10} + 1, \qquad F(x) = \frac{x^{10}}{10} - \pi, \qquad F(x) = \frac{x^{10}}{10} + 5$$

Primitivna funkcija

Neka je f neprekidna funkcija na $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

zove se primitivna funkcija.

Neka je F primitivna funkcija funkcije f na $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada je i $F + c$ primitivna funkcija funkcije f na *I* za svaki $c \in \mathbb{R}$.

Sve primitivne funkcije od f su oblika $F + c, c \in \mathbb{R}$.

Neodređeni integral

Skup svih primitivnih funkcija f zove se neodređeni integral funkcije f i pišemo:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

- $f(x)$ je podintegralna funkcija
- dx određuje varijablu po kojoj se integrira
- $F(x)$ je primitivna funkcija funkcije $f(x)$
- $c \in \mathbb{R}$ je konstanta integracije

Neodređeni integral

Do sada smo upoznali tek jedno pravilo za integriranje, pravilo za potencije:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

No, to nam pravilo omogućava integriranje velikog broja funkcija!

Primjer 1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$a)\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$b)\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

$$c)\int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$$

Primjer 1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$d)\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$e)\int \sqrt[4]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c$$

$$f)\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{x} + c$$

Primjer 1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$g)\int \frac{1}{x}dx \quad = \int x^{-1}\,dx \quad = \frac{x^0}{0} + c \qquad ???$$

Primjer $g)$ je izuzetak od pravila za potencije!

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

Primjer 1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$h)\int 2\,dx \quad = 2x + c$$

$$i)\int \frac{dx}{5} \quad = \frac{1}{5}x + c$$

$$j)\int 3\,dt \quad = 3t + c$$

Tablica neodređenih integrala

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

Svojstva neodređenih integrala

1. $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$

2. $\int (f'(x))dx = f(x) + c$

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4. $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx \qquad a \in \mathbb{R}$

Metode integriranja

Za razliku od deriviranja, kod integriranja ne postoje pravila za sve moguće oblike podintegralne funkcije.

Zato pravila nadopunjujemo **metodama**:

1. Metoda neposredne integracije
2. Metoda supstitucije (ili zamjene)
3. Metoda parcijalne integracije

Neposredna integracija

Metoda neposredne integracije:

- neposredna primjena tabličnih integrala

$$\int (2x^2 - 3\sin x)\,dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 3\cos x + c$$

- modifikacija podintegralne funkcije kako bi upotrijebili tablične integrale

$$\int (x-2)^2 dx = \int (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + c$$

Primjer 2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$a) \int (3\cos x - 4^x)\, dx = 3\sin x - \frac{4^x}{\ln 4} + c$$

$$b) \int \left(\frac{3}{x} - x + 2\right) dx = 3\ln x - \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

$$c) \int \left(\frac{3}{2\sin^2 x} + \frac{e^x}{4}\right) dx = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{4}e^x + c$$

Primjer 2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$d)\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \quad = \int\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \quad = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + c$$

$$e)\int(2^x\cdot 3^x)dx \quad = \int 6^x\,dx \quad = \frac{6^x}{\ln 6} + c$$

Primjer 3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$a) \int x^2 \cdot (2x-1)\,dx = \int (2x^3 - x^2)dx$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + c$$

$$b) \int (\sqrt{x} - 3)^2\,dx = \int (x - 6\sqrt{x} + 9)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 6\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 9x + c = \frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x^3} + 9x + c$$

Primjer 3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$c)\int\left(2^{-x}-\frac{1}{x^2}+1\right)dx \quad =\int\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-x^{-2}+1\right)dx$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}-\frac{x^{-1}}{-1}+x+c \quad =-\frac{2^{-x}}{\ln 2}+\frac{1}{x}+x+c$$

Primjer 3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$d)\int\left(\frac{x+xe^{x}-2}{x}\right)dx=\int\left(\frac{x}{x}+\frac{xe^{x}}{x}-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$=\int\left(1+e^{x}-\frac{2}{x}\right)dx=x+e^{x}-2\ln|x|+c$$

$$e)\int\left(\frac{x^{2}-3x+1}{x^{2}}\right)dx=\int\left(\frac{x^{2}}{x^{2}}-\frac{3x}{x^{2}}+\frac{1}{x^{2}}\right)dx$$

$$=\int\left(1-\frac{3}{x}+x^{-2}\right)dx=x-3\ln|x|-\frac{1}{x}+c$$

Primjer 3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$f)\ \int \left(\frac{6^x + 8^x}{2^x}\right) dx = \int \left(\frac{6^x}{2^x} + \frac{8^x}{2^x}\right) dx$$

$$= \int (3^x + 4^x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4^x}{\ln 4} + c$$

$$g)\ \int \left(\frac{5^x - 3^x + 1}{3^x}\right) dx = \int \left(\frac{5^x}{3^x} - \frac{3^x}{3^x} + \frac{1}{3^x}\right) dx$$

$$= \int \left(\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x\right) dx = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln \frac{5}{3}} - x + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + c$$

Primjer 4. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$a)\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$c)\int ax\,da = \frac{a^2}{2} \cdot x + c$$

$$b)\int ax\,dx = a \cdot \frac{x^2}{2} + c$$

$$d)\int ax\,dy = ax \cdot y + c$$

Hvala ☺