# MATEMATIČKA ANALIZA

## Diferencijalne jednadžbe

# Diferencijalne jednadžbe

Diferencijalna jednadžba je jednadžba koja sadrži i derivaciju funkcije koju želimo odrediti.

Diferencijalne jednadžbe razlikujemo po stupnju derivacije funkcije koja se u njoj pojavljuje:

- diferencijalne jednadžbe prvog reda (sadrže $y'$)
- diferencijalne jednadžbe drugog reda (sadrže $y''$)
- diferencijalne jednadžbe višeg reda (sadrže više derivacije funkcije $y$)

# Diferencijalne jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe koristimo u modeliranju mnogih problema koji uključuju brzinu promjene neke veličine.

Na primjer, u fizici se horizontalna i vertikalna komponenta kretanja tijela može opisati slijedećim diferencijalnim jednadžbama:

$$m \cdot x''(t) = 0 \qquad\qquad m \cdot y''(t) = -mg$$

Radi se o jednadžbama koje slijede iz drugog Newtonovog zakona gibanja: $F = m \cdot a$

# Diferencijalne jednadžbe

U epidemiologiji je poznat tzv. SIR-model kojim se pomoću diferencijalnih jednadžbi opisuje širenje epidemije u populaciji.

$S(t)$ – broj nezaraženih pojedinaca (**S**uspectible)

$I(t)$ – broj zaraženih pojedinaca (**I**nfectious)

$R(t)$ – broj oporavljenih pojedinaca (**R**emoved)

$$S' = -\beta \frac{I\,S}{n} \qquad I' = \beta \frac{I\,S}{n} - \gamma I \qquad R' = \gamma I$$

# Diferencijalne jednadžbe

Općenito, diferencijalna jednadžba prvog reda je jednadžba oblika

$$f(x, y, y') = 0$$

Postoji više tipova diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

- separabilne $\quad y' = f(x) \cdot g(y)$
- linearne $\quad y' + p(x) \cdot y = q(x)$
- Bernoullijeva $\quad y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$

$\vdots$

# Separabilne diferencijalne jednadžbe

Separabilne diferencijalne jednadžbe prvog reda se mogu zapisati u obliku

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Kod tog tipa diferencijalnih jednadžbi funkciju s desne strane možemo zapisati u obliku umnoška dviju funkcija $f$ i $g$, kojima su *razdvojene* (*separirane*) pojave veličina $x$ i $y$.

# Separabilne diferencijalne jednadžbe

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Postupak rješavanja:

1. Umjesto $y'$ pišemo $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

2. Separiramo jednadžbu

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

3. Integriramo jednadžbu

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

## Primjer 1. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$2xy\,y' = 1$$

$$2xy\frac{dy}{dx} = 1$$

$$2y\,dy = \frac{dx}{x}$$

$$\int 2y\,dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$y^2 + c_1 = \ln|x| + c_2 \; - c_1$$

$$y = \pm\sqrt{\ln|x| + c}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\ln|x| + c} \\ y_2 &= -\sqrt{\ln|x| + c} \end{aligned}}$$

OPĆE RJEŠENJE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

# Separabilne diferencijalne jednadžbe

Vidimo kako je rješenje diferencijalne jednadžbe zapravo *klasa* beskonačno mnogo funkcija.

Svaka nova vrijednost neodređene konstante $c$ daje novo rješenje diferencijalne jednadžbe.

Tu klasu funkcija nazivamo **općim rješenjem** diferencijalne jednadžbe.

# Separabilne diferencijalne jednadžbe

Diferencijalna jednadžba je ponekad zadana s dodatnim uvjetom kojeg rješenje mora ispuniti, $y(x_0) = y_0$.

Takav uvjet nazivamo **početnim uvjetom**.

Diferencijalna jednadžba koja je zadana zajedno s početnim uvjetom naziva se **Cauchyjev problem**.

# Separabilne diferencijalne jednadžbe

Cauchyjev problem rješavamo tako da prvo odredimo opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Potom u opće rješenje uvrstimo vrijednosti iz zadanog početnog uvjeta, i iz dobivene jednadžbe odredimo vrijednost konstante $c$.

Rješenje s tako određenom vrijednosti konstante $c$ nazivamo **partikularnim rješenjem** diferencijalne jednadžbe.

Primjer 2. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{x^2}{y}y' = 1$ za koju vrijedi $y(1) = \frac{2}{e}$.

$$\frac{x^2}{y}y' = 1$$

$$\frac{x^2}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x^2}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int x^{-2}\,dx$$

$$\ln y = -\frac{1}{x} + c$$

$$y = e^{-\frac{1}{x}+c}$$

$$y = e^{-\frac{1}{x}} \cdot e^{c}$$

$$\boxed{y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}}}$$

OPĆE RJEŠENJE

Primjer 2. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{x^2}{y}y' = 1$ za koju vrijedi $y(1) = \frac{2}{e}$.

U opće rješenje uvrštavamo $x = 1, y = \frac{2}{e}$.

$$\frac{2}{e} = c \cdot e^{-1}$$

$$\frac{2}{e} = \frac{c}{e}$$

$$c = 2$$

$$\boxed{y = 2e^{-\frac{1}{x}}}$$

PARTIKULARNO RJEŠENJE

$$\boxed{y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}}}$$

OPĆE RJEŠENJE

# Separabilne diferencijalne jednadžbe

Separabilne diferencijalne jednadžbe često se pojavljuju u primjeni, pogotovo kada opisujemo procese koji su proporcionalni brzini promjene.

Na primjer, problem rasta snježne kugle:

- brzina rasta polumjera snježne kugle proporcionalna je površini snježne kugle
- površina snježne kugle proporcionalna je kvadratu polumjera snježne kugle

## Problem rasta snježne kugle:

- brzina rasta polumjera snježne kugle proporcionalna je površini snježne kugle

$$r(t) - polumjer\ snježne\ kugle\ u\ trenutku\ t$$

$$\frac{dr}{dt} = k_1 \cdot P$$

- površina snježne kugle proporcionalna je kvadratu polumjera snježne kugle

$$P = k_2 \cdot r^2$$

$$\frac{dr}{dt} = k_1 \cdot P \ = k_1 \cdot (k_2 \cdot r^2) = k \cdot r^2$$

Zadatak: Snježna kugla u početnom trenutku ima radijus od 2 cm. Nakon 10 sekundi kotrljanja niz padinu, radijus snježne kugle je narastao na 5 cm.

Koliki će biti radijus snježne kugle 15 sekundi nakon početka kotrljanja?

$$\frac{dr}{dt} = k \cdot r^2 \qquad \frac{dr}{r^2} = k\,dt \qquad \int \frac{dr}{r^2} = \int k\,dt$$

$$-\frac{1}{r} = k \cdot t + c \qquad \frac{1}{r} = -k \cdot t - c \qquad r(t) = \frac{1}{-k \cdot t - c}$$

Zadatak: Snježna kugla u početnom trenutku ima radijus od 2 cm. Nakon 10 sekundi kotrljanja niz padinu, radijus snježne kugle je narastao na 5 cm.

Koliki će biti radijus snježne kugle 15 sekundi nakon početka kotrljanja?

$$r(t) = \frac{1}{-k \cdot t - c}$$

$$r(0) = 2$$

$$c = -0.5$$

$$r(t) = \frac{1}{-k \cdot t + 0.5}$$

$$r(10) = 5$$

$$k = 0.03$$

$$\boxed{r(t) = \frac{1}{-0.03 \cdot t + 0.5}}$$

Zadatak: Snježna kugla u početnom trenutku ima radijus od 2 cm. Nakon 10 sekundi kotrljanja niz padinu, radijus snježne kugle je narastao na 5 cm.

Koliki će biti radijus snježne kugle 15 sekundi nakon početka kotrljanja?

$$\boxed{r(t) = \frac{1}{-0.03 \cdot t + 0.5}}$$

$$r(15) = \frac{1}{-0.03 \cdot 15 + 0.5} = 20$$

Radijus snježne kugle 15 sekundi nakon početka kotrljanja će iznositi 20 cm.

# „Predator-prey" model

U prirodi postoji dinamička ravnoteža između broja predatora (životinja koje love druge životinje) i lovine.

Početkom 20. stoljeća, Lotka i Volterra predložili su model koji opisuje kretanje populacije predatora $x(t)$ i lovine $y(t)$ u vremenu.

# „Predator-prey” model

Ako nema lovine, populacija predatora se smanjuje brzinom koja je proporcionalna samoj populaciji predatora.

Ako ima lovine, populacija predatora raste brzinom koja je proporcionalna umnošku veličine populacije predatora i populacije lovine.

$$\frac{dx}{dt} = -p \cdot x + q \cdot xy$$

# „Predator-prey” model

Ako nema predatora, populacija lovine raste brzinom koja je proporcionalna veličini populacije lovine.

Ako ima predatora, populacija lovine se smanjuje brzinom koja je proporcionalna umnošku veličine populacije predatora i populacije lovine.

$$\frac{dy}{dt} = r \cdot y - s \cdot xy$$

# „Predator-prey" model

$$\frac{dx}{dt} = -p \cdot x + q \cdot xy \qquad \frac{dy}{dt} = r \cdot y - s \cdot xy$$

Ako podijelimo te dvije jednadžbe, dobivamo:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{r \cdot y - s \cdot xy}{-p \cdot x + q \cdot xy} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(r - sx)}{x\,(qy - p)}}$$

Tako smo dobili diferencijalnu jednadžbu koja opisuje odnos veličina populacije predatora i lovine.

# „Predator-prey" model

Riješimo tu diferencijalnu jednadžbu za zadane vrijednosti parametara $p, q, r, s$:

Zadatak: Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(4-2x)}{x\,(y-3)}$$

tako da rješenje prolazi kroz točku $(1, e)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(4-2x)}{x\,(y-3)} \qquad \frac{y-3}{y}\,dy = \frac{4-2x}{x}\,dx$$

$$\int \frac{y-3}{y}\,dy = \int \frac{4-2x}{x}\,dx \qquad \int \left(1-\frac{3}{y}\right)dy = \int \left(\frac{4}{x}-2\right)dx$$

$$y - 3\ln|y| = 4\ln|x| - 2x + c$$

Uvrstimo točku $(1, e)$.

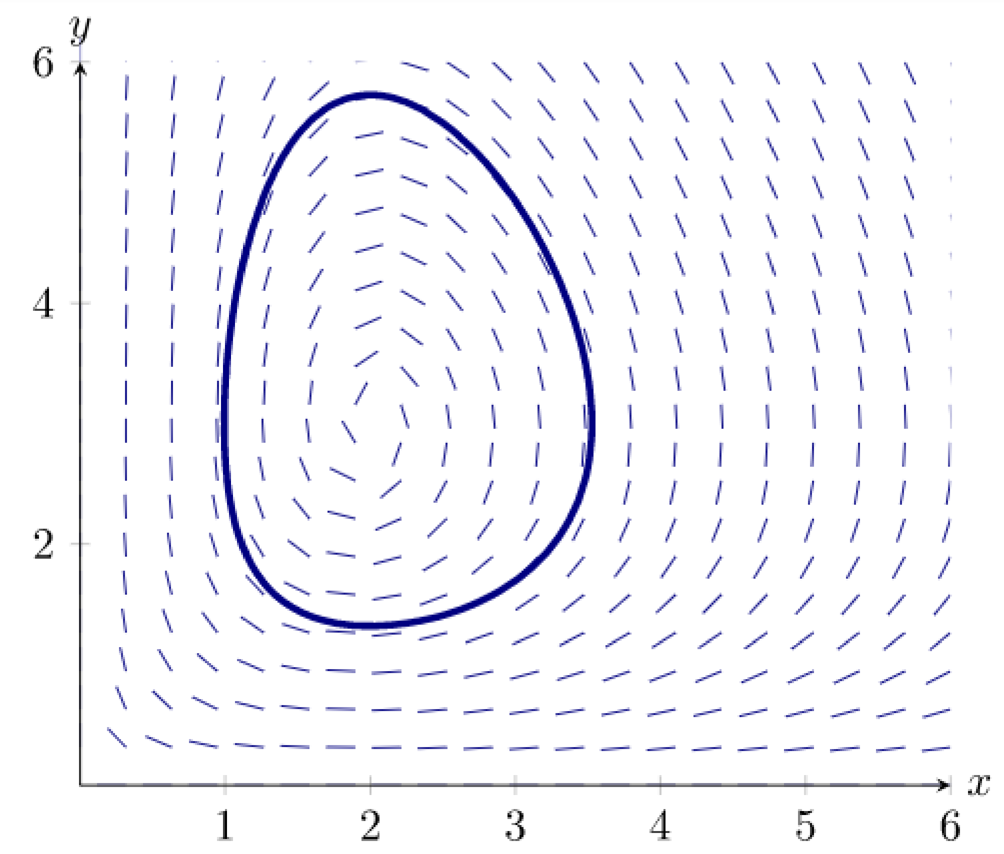
$$e - 3\ln e = 4\ln 1 - 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = e - 1$$

$$\boxed{y - 3\ln|y| = 4\ln|x| - 2x + e - 1}$$

# „Predator-prey” model

$$\boxed{y - 3\ln|y| = 4\ln|x| - 2x + e - 1}$$

Rješenje je implicitno zadana funkcija $y(x)$ koja pokazuje kolika je veličina populacije lovine $y$ u odnosu na veličinu populacije predatora $x$.



# Newtonov zakon hlađenja

Neka je temperatura kave u šalici $70°$C, te se nalazi u sobi temperature $20°$C.

Diferencijalna jednadžba koja opisuje promjenu temperature kave u vremenu, $T(t)$, dana je Newtonovim zakonom hlađenja:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - 20)$$

gdje je $k$ neka konstanta proporcionalnosti.

# Newtonov zakon hlađenja

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - 20)$$

$$\frac{dT}{T - 20} = -k\,dt$$

$$\int \frac{dT}{T - 20} = \int -k\,dt$$

$$\ln|T - 20| = -k \cdot t + c$$

$$T - 20 = e^{-k \cdot t + c}$$

$$\boxed{T = 20 + c \cdot e^{-k \cdot t}}$$

# Newtonov zakon hlađenja

$$T(t) = 20 + c \cdot e^{-k \cdot t}$$

Konstantu integracije $c$ možemo izračunati iz početnog uvjeta da je temperatura kave u šalici na početku (dakle za $t = 0$) jednaka 70°C.

$$70 = 20 + c \cdot e^{0}$$

$$c = 50$$

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-k \cdot t}$$

# Newtonov zakon hlađenja

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-k \cdot t}$$

No za određivanje konstante proporcionalnosti $k$, treba nam neka dodatna informacija.

Izračunati ćemo vrijednost te konstante pomoću dodatnog podatka da se temperatura kave u šalici nakon jedne minute spustila za 2°C, tj. da je $T(1) = 68$.

# Newtonov zakon hlađenja

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$T(1) = 68$$

$$68 = 20 + 50 \cdot e^{-k} \quad \Rightarrow \quad e^{-k} = 0.96 \quad \Rightarrow \quad k = 0.0408$$

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-0.0408 \cdot t}$$

Kada je poznata funkcija promjene temperature kave, moguće je odgovoriti na razna pitanja.

# Newtonov zakon hlađenja

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-0.0408 \cdot t}$$

1) Kolika će biti temperatura kave nakon 20 minuta?

$$T(20) = 20 + 50 \cdot e^{-0.0408 \cdot 20} \quad = 42.1$$

2) Nakon kojeg vremena će temperature kave biti 35°C?

$$35 = 20 + 50 \cdot e^{-0.0408 \cdot t} \qquad e^{-0.0408 \cdot t} = 0.3$$

$$-0.0408\, t = \ln 0.3 \qquad t = 29.5$$

Hvala ☺