MATEMATIČKA ANALIZA

Primjena integralnog računa u ekonomiji

Ekonomske funkcije

Prisjetimo se.

Ukoliko je funkcija $T(Q)$ funkcija ukupnih troškova (gdje je Q količina), tada možemo definirati slijedeće ekonomske funkcije:

- funkcija prosječnih troškova, $AT(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$
- funkcija graničnih troškova, $MT(Q) = T'(Q)$

Granični troškovi

Kako se granični troškovi dobivaju deriviranjem funkcije ukupnih troškova, $MT(Q) = T'(Q)$, slijedi:

$$T(Q) = \int MT(Q)\, dQ$$

No, rješenje neodređenog integrala je klasa funkcija koje se međusobno razlikuju u vrijednosti neodređene konstante integriranja, c.

Stoga nam je za određivanje funkcije ukupnih troškova potreban još jedan dodatni podatak.

Granični troškovi

$$T(Q) = \int MT(Q)\, dQ$$

Često se kao dodatni podatak, zadaje vrijednost ukupnih troškova na razini proizvodnje $Q = 0$, odnosno $T(0)$.

Tu veličinu nazivamo i **fiksnim troškovima**.

Radi se o troškovima tzv. „hladnog pogona”, odnosno troškovima koji postoje i bez proizvodnje.

Zadatak 1.

Odredite funkciju ukupnih troškova ako su granični troškovi jednaki $MT(Q) = \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2}$, a fiksni troškovi jednaki 100.

$$T(Q) = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2}\right) dQ \ = \int \left(\frac{1}{2} - 50 \cdot (Q+1)^{-2}\right) dQ$$

$$= \frac{Q}{2} - 50 \cdot \frac{(Q+1)^{-1}}{-1} + c \ = \frac{Q}{2} + \frac{50}{Q+1} + c$$

Zadatak 1.

Odredite funkciju ukupnih troškova ako su granični troškovi jednaki $MT(Q) = \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2}$, a fiksni troškovi jednaki 100.

$$T(Q) = \frac{Q}{2} + \frac{50}{Q+1} + c \qquad T(0) = 100$$

$$100 = \frac{0}{2} + \frac{50}{1} + c \quad \Rightarrow \quad c = 50$$

$$\boxed{T(Q) = \frac{Q}{2} + \frac{50}{Q+1} + 50}$$

ALGEBRA

Zadatak 2.

Odredite razinu proizvodnje Q na kojoj funkcija ukupnih troškova postiže minimum, ako su granični troškovi jednaki $MT(Q) = \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2}$, a fiksni troškovi 100. Koliko iznose ti minimalni ukupni troškovi?

$$T' = 0 \quad \Rightarrow \quad MT = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2} = 0$$

$$\boxed{Q = 9}$$

$$T'' = MT' = \frac{100}{(Q+1)^3} \qquad T''(9) = \frac{100}{1000} > 0$$

minimum!

Zadatak 2.

Odredite razinu proizvodnje Q na kojoj funkcija ukupnih troškova postiže minimum, ako su granični troškovi jednaki $MT(Q) = \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2}$, a fiksni troškovi 100. Koliko iznose ti minimalni ukupni troškovi?

$$\boxed{Q = 9}$$

$$T(Q) = \frac{Q}{2} + \frac{50}{Q+1} + 50$$

$$\boxed{T(9)} = \frac{9}{2} + \frac{50}{9+1} + 50 \boxed{= 59.5}$$

Koeficijent elastičnosti

$$E_{y,x} = \frac{\text{relativna promjena od } y}{\text{relativna promjena od } x}$$

$$\boxed{E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot y'}$$

Interpretacija: kada varijabla x raste za 1%, tada funkcija $y(x)$ raste (pada) za približno $|E_{y,x}|$%.

Koeficijent elastičnosti

U prvom dijelu semestra određivali smo koeficijent elastičnosti $E_{y,x}$ kada nam je bila zadana funkcija $y(x)$.

Sada postavljamo obrnuto pitanje: kako odrediti funkciju $y(x)$ ako nam je zadan njen koeficijent elastičnosti $E_{y,x}$?

Odgovor: rješavanjem pripadne diferencijalne jednadžbe.

Zadatak 3. Odredite funkciju potražnje u ovisnosti o cijeni, $q(p)$, ako vrijedi $E_{q,p} = p + 1$, te $q(1) = 2e$.

$$E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

$$\int \frac{1}{q} dq = \int \left(1 + \frac{1}{p}\right) dp$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = p + 1$$

$$\frac{1}{q} dq = \frac{p+1}{p} dp$$

$$\ln q = p + \ln p + c$$

$$q = e^{p + \ln p + c}$$

$$q = c \cdot e^{p} \cdot p$$

$$2e = c \cdot e^{1} \cdot 1$$

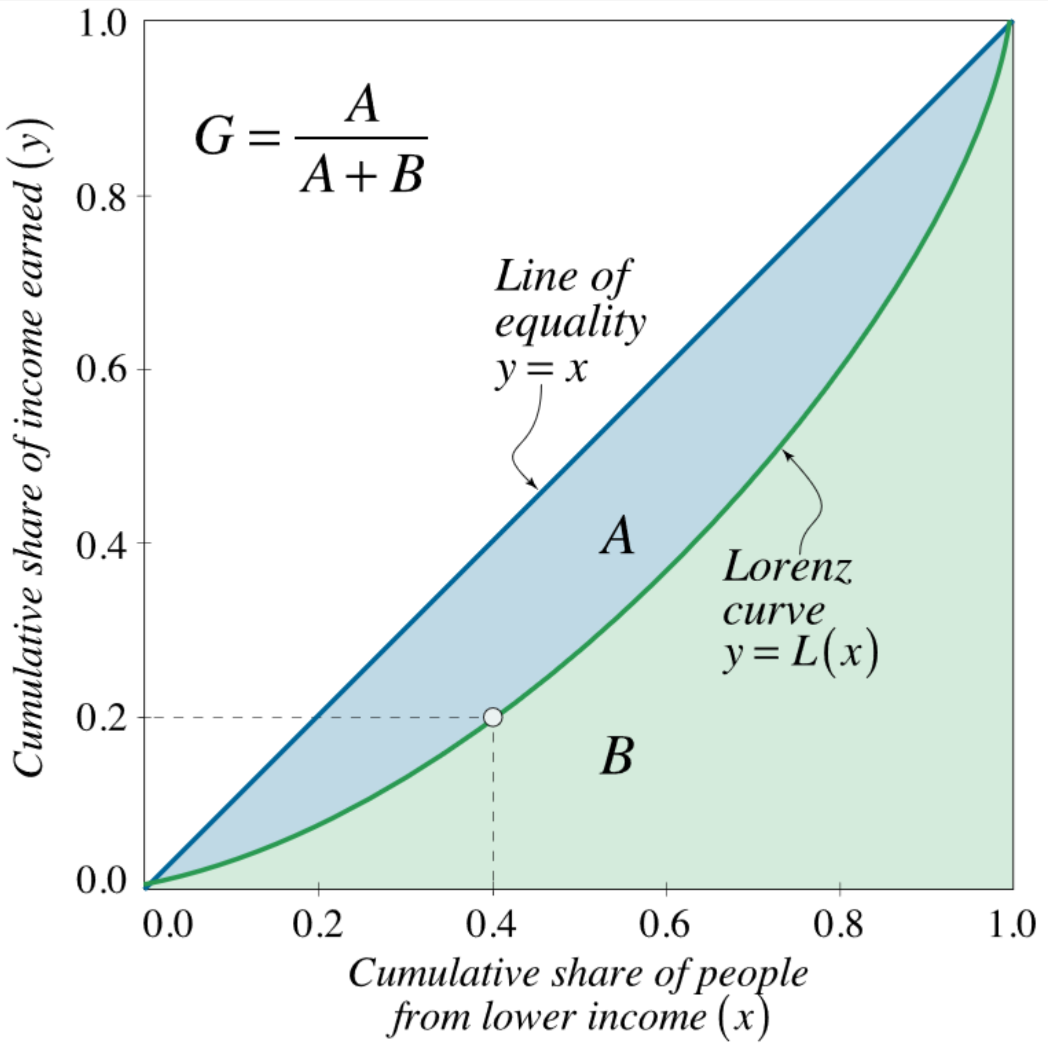
$$c = 2$$

$$\boxed{q = 2 \cdot e^{p} \cdot p}$$

Lorenzova krivulja

Lorenzova krivulja je grafički prikaz nejednakosti raspodjele nekog dobra (bogatstva, prihoda, imovine…) u populaciji.

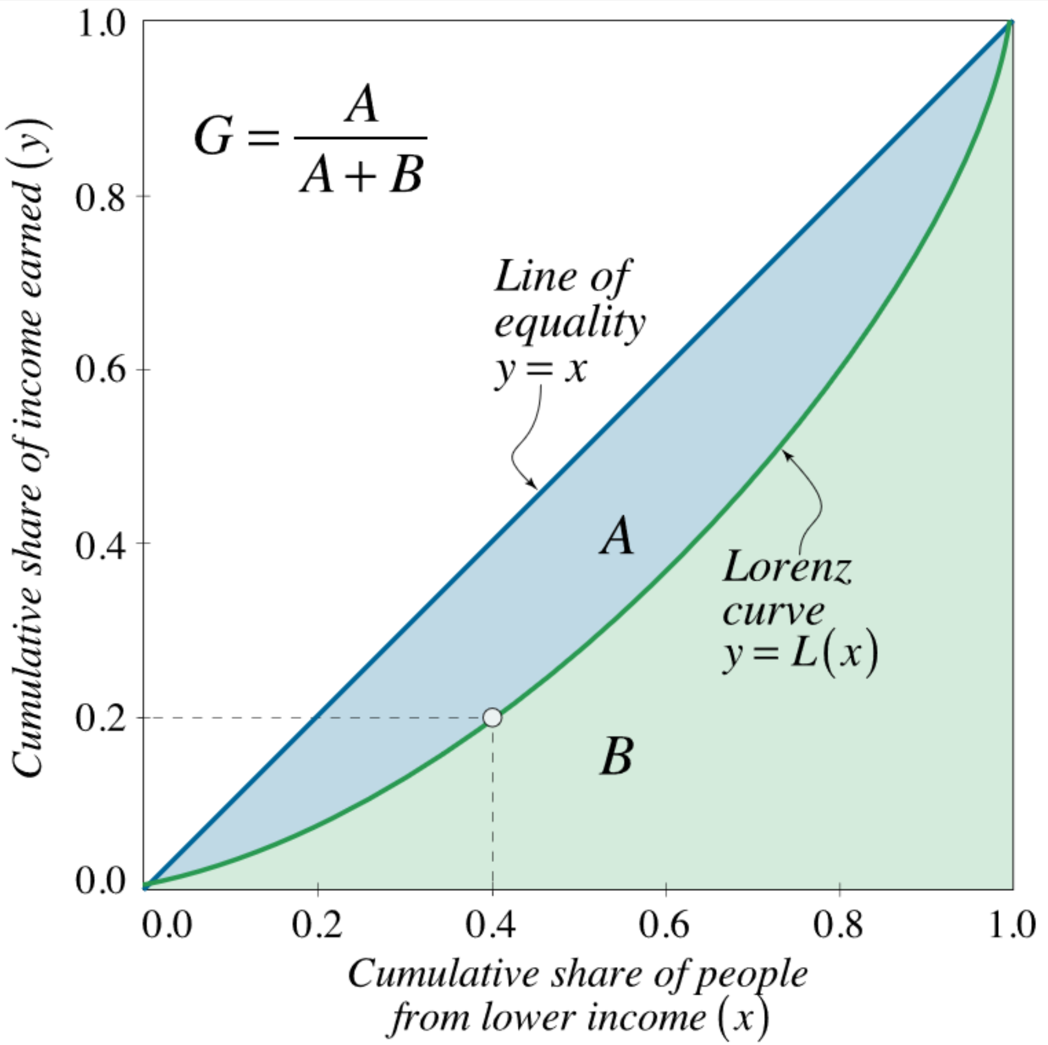
x-os: postotni udio populacije
y-os: postotni udio ukupnog bogatstva (prihoda, itd.)



Lorenzova krivulja

Na primjer, točka na Lorenzovoj krivulji s koordinatama $(0.4, 0.2)$ govori kako 40% ukupne populacije posjeduje 20% ukupnog bogatstva.

Pravac $y = x$ predstavlja uniformnu razdiobu bogatstva, tj. potpunu jednakost.

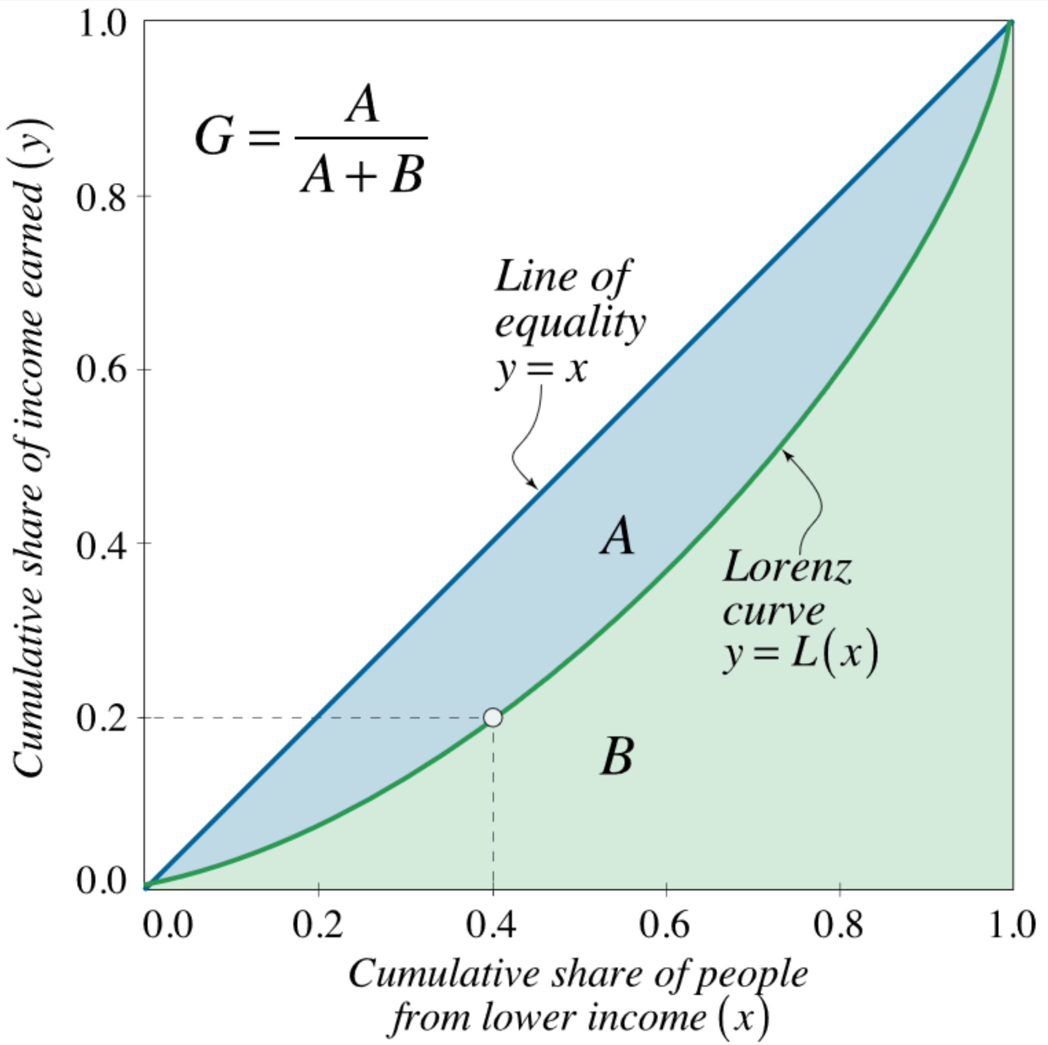


Lorenzova krivulja

Lorenzovu krivulju obilježavamo s $L(x)$.

Što je krivulja $L(x)$ konveksnija, to je nejednakost u društvu veća.

Kao mjera nejednakosti koju prikazuje Lorenzova krivulja koristi se Ginijev koeficijent.

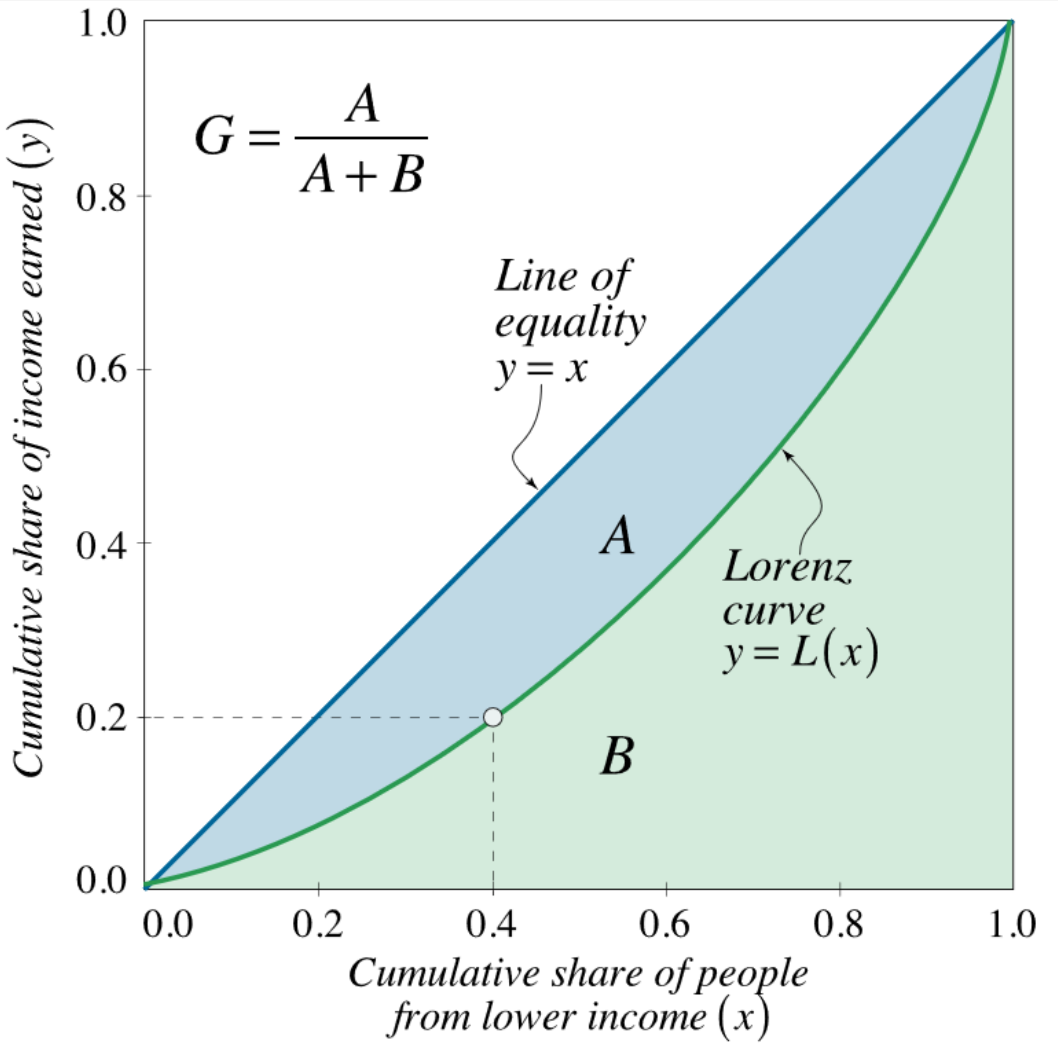


Ginijev koeficijent

Ginijev koeficijent je definiran kao omjer površine između Lorenzove krivulje i linije jednakosti (A) i ukupne površine ispod linije jednakosti (A+B).

$$G = \frac{A}{A+B} = \frac{\int_0^1 (x - L(x))\, dx}{\int_0^1 x\, dx}$$

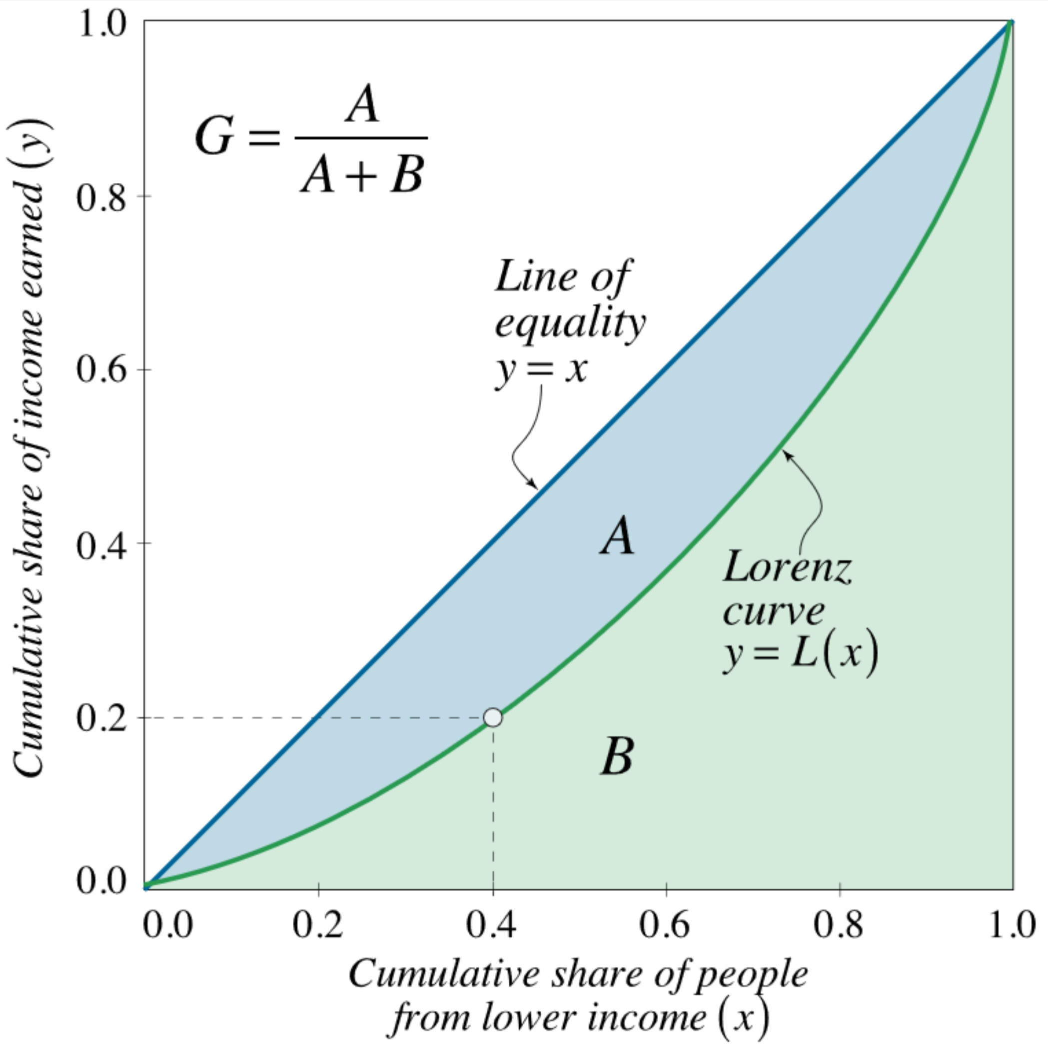
$$G = 2\int_0^1 (x - L(x))\ dx$$



Ginijev koeficijent

Ginijev koeficijent je je relativna mjera nejednakosti.

Poprima vrijednosti od 0 ili 0% (potpuna jednakost) do 1 ili 100% (potpuna nejednakost)



Zadatak 4. Lorenzova krivulja nekog društva dana je s $L(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$. Odredite Ginijev koeficijent za takvu distribuciju bogatstva.

$$G = 2\int_0^1 \big(x - L(x)\big)\,dx = 2\int_0^1 \left(x - \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}x\right) dx$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2\right) dx = 2\left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{20}x^4 - \frac{1}{15}x^3\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 2\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{20} - \frac{1}{15}\right) = \frac{11}{30} \approx 0.37$$

Ginijev koeficijent

Primjeri Ginijevog koeficijenta prihoda kućanstva prema procjeni Svjetske banke (izvor).

Slovenija: $G = 25.4$

Finska: $G = 27.1$

Švedska: $G = 29.2$

Austrija: $G = 30.5$

Hrvatska: $G = 31.1$

Velika Britanija: $G = 33.2$

Rusija: $G = 37.7$

Srbija: $G = 39.6$

SAD: $G = 41.5$

JAR: $G = 63.0$

Hvala ☺