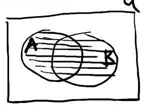
Vježbe 2

9. listopada 2024. 7:58

FORMULA UKLJUČIVANJA - ISKLJUČIVANJA

Broj elemenata unije DVA skupa: Ako su A i B konačni skupovi, tada za broj elemenata unije ta dva skupa vrijedi sljedeće:

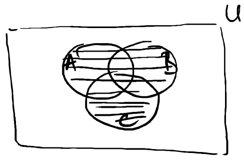
$$\boxed{c(A \overset{ili}{\cup} B) = c(A) + c(B) - c(A \overset{i}{\cap} B).}$$



$c(A)$ → broj elemenata skupa A

Broj elemenata unije TRIJU skupova:

$$c(A \overset{ili}{\cup} B \overset{ili}{\cup} C) = c(A) + c(B) + c(C) - c(A \overset{i}{\cap} B) - c(A \overset{i}{\cap} C) - c(B \overset{i}{\cap} C) + c(A \overset{i}{\cap} B \overset{i}{\cap} C).$$



De Morganova pravila:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} & \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{A \cap B \cap C} \\ \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} & \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C} \end{array}}$$

15. Koliko ima troznamenkastih brojeva koji:
   a) ne sadrže znamenku 3 i znamenku 7,
   b) ne sadrže znamenku 3 ili znamenku 7,
   c) sadrže barem jednu znamenku 3,
   d) sadrže barem jednu znamenku 3 ili barem jednu znamenku 7,
   e) sadrže barem jednu znamenku 3 i barem jednu znamenku 7,
   f) sadrže barem jednu od znamenaka 3, 7 ili 9?

U = { svi troznamenkasti }

A = { troznam. bez 3 }

B = { troznam bez znamenke 7 }

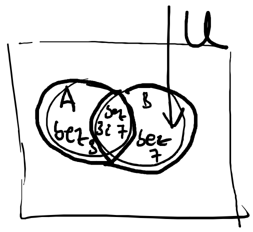
a) $c(A \overset{i}{\cap} B) = \underline{7} \cdot \underline{8} \cdot \underline{8} = 448$

$\cancel{3}, \cancel{7}, \cancel{0} \quad \cancel{3}, \cancel{7} \quad \cancel{3}, \cancel{7}$

b) $\boxed{c(A \overset{ili}{\cup} B) = c(A) + c(B) - c(A \overset{i}{\cap} B)}$

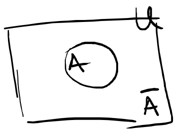
$= \underline{8} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} + \underline{8} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} - {}^{a)}\, 448 = 848$

$\cancel{3}, \cancel{0} \quad \cancel{3} \quad \cancel{3} \qquad \cancel{7}, \cancel{0} \quad \cancel{7} \quad \cancel{7}$



c) $\bar{A}$ = { troznam. sa (barem jednom) znamenkom 3 }

PRAVILO KOMPLEMENTA



$\boxed{c(\bar{A}) = c(U) - c(A)}$ ili $c(A) = c(U) - c(\bar{A})$

$= \underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} - \underline{8} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9}$

$\cancel{0} \qquad \cancel{0}, \cancel{3} \quad \cancel{3} \quad \cancel{3}$

$= 252$

d) $\bar{B}$ = { troznam. sa (barem jednom) znam. 7 }

$$c(\overline{A} \overset{ili}{\cup} \overline{B}) \overset{\text{de Morgan}}{=} c(\overline{A \cap B}) \overset{\text{pravilo komplem.}}{=} c(U) - c(A \overset{i}{\cap} B) = 900 - 448$$

a)

$$= 452$$

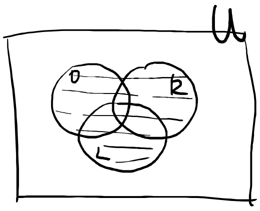
e) $$c(\overline{A} \overset{i}{\cap} \overline{B}) \overset{\text{de Mor.}}{=} c(\overline{A \cup B}) \overset{\text{pravilo kompl.}}{=} c(U) - c(A \cup B) = 900 - 848$$

f) sadrže barem jednu od znamenaka 3, 7 ili 9?

$$c(\underbrace{\overline{A}}_{\text{barem 1 trojke}} \overset{ili}{\cup} \underbrace{\overline{B}}_{\text{barem 1 sedmice}} \overset{ili}{\cup} \underbrace{\overline{C}}_{\text{barem 1 devetke}}) \overset{\text{deM.}}{=} c(\overline{A \cap B \cap C}) \overset{\text{pravilo kompl.}}{=} c(U) - c(\overset{\text{bez 3}}{A} \overset{i}{\cap} \overset{\text{bez 7}}{B} \overset{i}{\cap} \overset{\text{bez 9}}{C}) =$$

$$= 900 - \underset{\cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{0}\,\cancel{9}}{6} \cdot \underset{\cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{9}}{7} \cdot \underset{\cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{9}}{7} = 606$$

16. U jednom gradu koji ima 40 000 stanovnika, organiziraju se u dobrotvorne svrhe razne aktivnosti. Gradonačelnik se na kraju godine pohvalio da su održani po dva koncerta i lutrija te da je više od pola građana sudjelovalo u dobrotvornim aktivnostima. Poznato je da je na koncertu ozbiljne glazbe bilo 2 000 ljudi, na rock koncertu ih je bilo 8 000, a po jedan listić lutrije kupilo je 12 000 stanovnika. Nadalje, zna se da je 500 ljudi bilo na oba koncerta, te da je lutriju kupilo 200 posjetitelja ozbiljne glazbe i 300 posjetitelja rock koncerta. Sto građana je kupilo lutriju i bilo na oba koncerta. Nitko nije kupio više od jednog listića lutrije. Je li gradonačelnik prenapuhao broj građana koji sudjeluju u dobrotvornim aktivnostima?



$c(U) = 40\,000$

$c(O) = 2000 \qquad c(O \overset{i}{\cap} R) = 500 \qquad c(O \overset{i}{\cap} R \overset{i}{\cap} L) = 100$

$c(R) = 8000 \qquad c(O \overset{i}{\cap} L) = 200$

$c(L) = 12000 \qquad c(R \overset{i}{\cap} L) = 300$

$$c(\underbrace{O \overset{ili}{\cup} L \overset{ili}{\cup} R}_{\text{dobrotvorne aktivnosti}}) = c(O) + c(L) + c(R) - c(O \overset{i}{\cap} L) - c(O \overset{i}{\cap} R) - c(L \overset{i}{\cap} R) + c(O \overset{i}{\cap} L \overset{i}{\cap} R)$$

$$= 2000 + 12000 + 8000 - 200 - 500 - 300 + 100$$

$$= 21\,100 > \underset{\text{pola građana}}{20\,000}$$

Gradonačelnik u pravu!

Nije prenapuhao . . . .

Varijacije

$S = \{a, b, c, d, e\}$ $n = 5$

Neka je dano n različitih elemenata. Ako sastavljamo nizove duljine k s ovim elementima, onda se ti nizovi nazivaju **varijacijama**.

Ako se elementi mogu ponavljati u nizu, tada je **ukupan broj varijacija** jednak

$$\underset{1.}{\underline{n}} \cdot \underset{2.}{\underline{n}} \cdot \underset{3.}{\underline{n}} \cdots \underset{k\text{-to mjesto}}{\underline{n}} = n^k .$$

duljina niza

Ako se elementi ne mogu ponavljati (tada mora vrijediti $k \le n$), tada je **ukupan broj varijacija** jednak

broj elemenata

$n - (k-1)$

$$\underset{1.}{\underline{n}} \cdot \underset{2.}{\underline{(n-1)}} \cdot \underset{3.}{\underline{(n-2)}} \cdots \underset{k\text{-to mjesto}}{\underline{(n-k+1)}} .$$

niz duljine $7 = k$
bez ponavljanja
$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}$ _ _
NE MOŽE

U rješavanju zadataka držat ćemo se i dalje pravila umnoška, a ne ovih formula, jer je jednostavnije tako razmišljati. Na kraju se svede na isto.

Također, da naglasimo, **bitan je redoslijed elemenata u nizu**!!!

17. Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke neparni brojevi ako:
    a) među znamenkama može biti i jednakih,
    b) su sve znamenke različite?

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$

a) $\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 5^3 = 125$

b) $\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60$

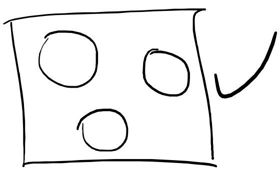
bez 1. znamenke

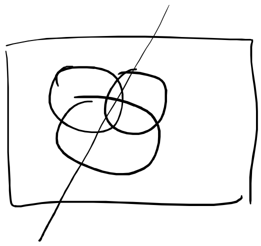
bez 1. i 2. znam.

18. Koliko se različitih riječi od 3, 4 ili 5 slova može napraviti od slova engleske abecede ako:
    a) su sva slova različita,
    b) se slova mogu ponavljati?

nizova

→ 26 slova





a) 3 slova $\cup$ 4 slova $\cup$ 5 slova

$\underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{24} + \underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{24} \cdot \underline{23} + \underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{24} \cdot \underline{23} \cdot \underline{22}$

$= 8\ 268\ 000$

b) $\underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26} + 26^4 + 26^5$

$= 12\ 355\ 928$

19. Na natjecanju u slalomu nastupa 50 natjecatelja. Na koliko načina se mogu poredati prva trojica?

$\underline{50} \cdot \underline{49} \cdot \underline{48} = 117\ 600$

ne može iste osoba

1. koliko je dugačak niz?
2. na koliko načina mogu popuniti svako mjesto?

na 2. mjesto opet

20. Koliki je ukupan broj igara u prvenstvu u kojem sudjeluje 18 ekipa, ako svatko igra sa svakim i to dva puta tijekom prvenstva?

1 igra: $\underline{18} \cdot \underline{17}$

$= 306$

za 3 ekipe: x, y, z

$\underline{3} \cdot \underline{2} = 6$

xy zy yx

xz zx yz

svaki par je već prebrojan dva puta

21. Koliko šifri može imati lokot koji ima 5 koluta s po 10 znamenki?

$\underset{1.}{\underline{10}} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underset{5. kolut.}{\underline{10}} = 10^5 = 100\ 000$

22. Na koliko načina može 6 osoba sjesti na po jedan od 8 stolaca?

$\cancel{\underset{1.}{\underline{6}} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}\ \underline{\quad}\ \underset{8. stolica}{\underline{\quad}}}$

$\underset{1.}{\underline{8}} \cdot \underset{2.}{\underline{7}} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underset{6. osoba}{\underline{3}} = 20\ 160$

23. Koliko se različitih nizova od 2 člana može napraviti od jedne crvene, jedne bijele, jedne plave i jedne žute kuglice i koji su to nizovi?

$\underline{4} \cdot \underline{3} = 12$

1c, 1b, 1p, 1ž → nema ponavljanja

cb bc pc žc

cp bp pb žb

cž bž pž žp

Permutacije

Neka je dano n elemenata. Ako sastavljamo nizove duljine n s tim elementima (tj. ako sastavljamo nizove od svih danih elemenata), tada se ti nizovi nazivaju **permutacijama**.

Ako su svi elementi različiti, tada je **ukupan broj permutacija** jednak

$$\underset{1.}{\underline{n}} \cdot \underset{2.}{\underline{(n-1)}} \cdot \underset{3.}{\underline{(n-2)}} \cdots \underline{2} \cdot \underset{n\text{-to mjesto}}{\underline{1}} = n! \longrightarrow n \text{ faktorijela}$$

Drugim riječima, $\boxed{n \text{ elemenata se može rasporediti na } n! \text{ načina.}}$ različitih

24. Ispišite sve nizove od 4 člana koje možemo dobiti od jedne crvene, jedne bijele, jedne plave i jedne žute kuglice.

1c, 1b, 1p, 1ž

$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 4!$

$= 24$

cbpž   bcpž   p...   ž...
cbžp   bcžp
cpžb   bžcp
cpbž   ⋮
cžbp
cžpb

25. Na koliko načina može 6 ljudi stati u red?

$\boxed{n \text{ elemenata se može rasporediti na } n! \text{ načina.}}$
različitih

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

26. Prva hrvatska nogometna liga broji 16 klubova. Koliko različitih plasmana možemo dobiti na kraju prvenstva?

$16! = 20\ 922\ 789\ 888\ 000$

27. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su znamenke međusobno različite i neparne?

$\{1,3,5,7,9\}$ $\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 5! = 120$

Ako se elementi ponavljaju, tj. ako među elementima ima k različitih takvih da se prvi element pojavljuje n_1 puta, drugi n_2 puta,… i k-ti element se pojavljuje n_k puta, tada je **ukupan broj permutacija** jednak

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}}.$$

Prema definiciji vrijedi $0! = 1$.
Opet, **bitan je redoslijed elemenata u nizu**!!!

a, a, a, b, b, b, b

$\frac{7!}{3! \cdot 4!}$ ukupan broj nizova

28. Koliko se različitih nizova može sastaviti od 2 nule i 3 jedinice?

00111 → 5 ukupno

$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

to su: 00111, 11100, 11010, 10110, 01110, 01101, 01011, 11001, 10011, 10101

29. Koliko se osmeroznamenkastih brojeva može napraviti od znamenaka broja 62774277?

šestice → 1
dvojke → 2
sedmice → 4
četvorke → 1
8

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 1!} = 840$$

30. Koliko se različitih deveteroslovnih riječi može sastaviti od slova riječi UMPALUMPA?

U → 2
M → 2
P → 2
A → 2
L → 1
9

$$\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} =$$

$a \cdot a \cdot a \cdot a$
$= a^4$

$a + a + a + a$
$= 4 \cdot a$

31. U natjecanju u skijanju sudjeluje 6 predstavnika Austrije, 5 Norveške, 3 Francuske, 1 Hrvatske i 2 Slovenije. Koliko ima različitih poredaka na kraju natjecanja ako su dva poretka jednaka ukoliko natjecatelji iz iste države osvoje ista mjesta?

$A_1 A_2$
$A_2 A_1$

A → 6
N → 5
F → 3
H → 1
S → 2
17

$$\frac{17!}{6! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!}$$