

Vjerojatnost i statistika

VJEŽBE – dio 3

(ISHOD 2)



3. UVJETNA VJEROJATNOST

Uvjetna vjerojatnost događaja A , ako je poznato da se ostvario događaj B takav da je $P(B) > 0$, je broj

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Vjerojatnost presjeka dvaju događaja:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B),$$

odnosno, ako zamijenimo ulogu slova A i B imamo $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Vjerojatnost presjeka triju događaja:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B).$$

1. Bacamo simetričnu kocku. Kolika je vjerojatnost da je kocka pala na broj 1 ako je pala na neparan broj?
2. Bacamo dvije simetrične kocke. Ako su kocke pale na različite brojeve, kolika je vjerojatnost da je zbroj tih brojeva veći od 8?
3. Iz skupa $\{1, 2, \dots, 99, 100\}$ slučajno je izabran jedan broj. Kolika je vjerojatnost da je to paran broj ako je poznato da je izabran broj djeljiv s 3?
4. U kutiji imamo 12 bijelih kuglica od čega 5 s oznakom x , a 7 s oznakom y , i 14 crnih kuglica od čega 9 s oznakom x , a 5 s oznakom y . Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući kuglicu s oznakom x ako je poznato da je izvučena bijela kuglica?
5. U kutiji se nalaze 4 crvene i 3 plave kuglice. Ne gledajući u kutiju tri puta iz nje izvučemo po jednu kuglicu bez vraćanja. Kolika je vjerojatnost
 - a) Da su prve dvije kuglice crvene
 - b) Da su sve tri kuglice crvene
 - c) Da je prva kuglica plava, a druge dvije crvene
 - d) Da niti jednom nije izvučena crvena kuglica?

Nezavisnost događaja

Događaji A i B su **nezavisni** ako vrijedi:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{ili} \quad P(B|A) = P(B).$$

Znači, dva događaja su nezavisna ako pojavljivanje jednog događaja ne utječe/ne mijenja vjerojatnost drugog događaja.

Lako se vidi da u tom slučaju **ako su A i B nezavisni vrijedi**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

I obrnuto, **ako vrijedi jednakost $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, tada zaključujemo da su A i B nezavisni.**

Više događaja su nezavisna, npr. 4 događaja su nezavisna ako je vjerojatnost presjeka jednaka umnoški pojedinih vjerojatnosti za dva događaja, posebno za tri te mora vrijediti i za sva 4 događaja.

6. Izračunajte vjerojatnosti u prethodnom zadatku ako se kuglica nakon izvlačenja vraća u kutiju.
7. Bacamo tri simetrična novčića. Zadani su događaji
 $A = \{\text{u sva tri bacanja isti ishod}\}$
 $B = \{\text{pismo se pojavilo najviše dva puta}\}$
 $C = \{\text{pismo se pojavilo barem dva puta}\}$.
Koji su parovi događaja nezavisni?
8. Neka je $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.8$, $P(B) = p$. Odredite p tako da vrijedi da su A i B nezavisni.
9. Vjerojatnosti pojavljivanja triju nezavisnih događaja su $2/3$, $3/5$, $1/2$.
 - a) Kolika je vjerojatnost da se ostvari barem jedan od njih?
 - b) Kolika je vjerojatnost da se ostvari točno jedan od njih?
10. Strijelac gađa metu dok je ne pogodi. Vjerojatnost pogotka u svakom gađanju je 0.6 . Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:
 - a) Meta je pogođena u trećem pokušaju
 - b) Meta je pogođena u prva tri pokušaja
 - c) Meta je pogođena nakon četvrtog pokušaja.

Formula potpune vjerojatnosti

Neka za dva događaja H_1 i H_2 vrijedi $H_1 \cup H_2 = \Omega$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ te $P(H_1), P(H_2) > 0$, tj. neka ta dva događaja čine particiju vjerojatnosnog prostora (rastav prostora na disjunktne neprazne podskupove). Tada za bilo koji događaj A vrijedi formula

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2).$$

Također uvijek mora vrijediti $P(H_1) + P(H_2) = 1$.

Događaje H_1 i H_2 zovemo hipotezama.

Gornja formula se može proširiti ako imamo više hipoteza H_1, H_2, \dots, H_n koje čine particiju vjerojatnosnog prostora:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n).$$

I ponovno mora vrijediti $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$.

11. U jednoj kutiji se nalaze 3 crne i 2 plave, a u drugoj kutiji 4 crne i 2 plave kuglice. Odabiremo na sreću jednu kuglicu iz prve kutije i prebacimo je u drugu. Kolika je vjerojatnost da će kuglica izvučena iz druge kutije biti plava?
12. U skupini od 10 strijelaca nalaze se 4 izvrsna i 6 dobrih. Vjerojatnost pogotka za izvrsne strijelce je 0.9, a za dobre 0.7. Iz skupine na sreću bирамо једног strijelca. Kolika je vjerojatnost da će on pogoditi metu?
13. Iz skupa $S = \{1, 6, 7, 8, 9\}$ slučajno se bira jedan broj, a iz preostalog skupa još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da drugi izabrani broj bude neparan?
14. U dva snopa karata nalaze se 52 karte sa po 4 asa. Izvučemo na sreću po jednu kartu iz svakog snopa, zatim izvučene karte pomiješamo i otkrijemo jednu. Kolika je vjerojatnost da je ta karta as?

Bayesova formula

Ako H_i , $i = 1, \dots, n$ čine particiju vjerojatnosnog prostora, tada vrijedi

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$$

pri čemu je $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$.

15. Jedna trgovina nabavlja DVD pržilice od 2 proizvođača P_1 i P_2 . P_1 doprema 1000 komada, od čega 5% s greškom, a P_2 700 komada, od čega 2% s greškom. Kolika je vjerojatnost da
- slučajno odabrani proizvod ima grešku
 - je slučajno odabrani proizvod, koji ima grešku, od proizvođača P_1 ?
16. Jedan tip proizvoda izrađuje se na 4 stroja. Na stroju S_1 izrađuje se 40% proizvoda od čega je 0.1% škarta, na stroju S_2 30% i od toga 0.2% škarta, na S_3 20% sa 0.25% škarta i na S_4 10% sa 0.5% škarta.
- Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani proizvod bude škart?
 - Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani proizvod, koji nije škart, izrađen na stroju S_1 ?
17. Imamo dvije grupe strijelaca, G_1 i G_2 . U grupi G_1 su 2 strijelca i svaki pogađa s vjerojatnošću 0.6, au G_2 su 3 strijelca i svaki gađa s vjerojatnošću 0.4.
- Je li vjerojatnije da slučajno odabrani strijelac pogodi ili promaši?
 - Je li vjerojatnije da slučajno odabrani strijelac, koji je pogodio u cilj, pripada grupi G_1 ili G_2 ?

18. Iz snopa od 52 karte izvučena je jedna karta. Nakon toga, izvučene su još dvije i pokazalo se da su obje karte pik boje. Kolika je vjerojatnost da je i prva karta pik boje?
19. U dvije od tri jednake pregrade nalaze se 2 crne i 2 bijele kuglice, a u trećoj 5 bijelih i 1 crna. Iz na sreću odabrane pregrade izvučena je bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je izvučena iz treće pregrade?
20. U prvoj kutiji su 2 bijele i 1 crna kuglica, a u drugoj 1 bijela i 5 crnih kuglica. Iz prve kutije su na sreću odabrane dvije kuglice i prebačene u drugu kutiju, a zatim je iz druge kutije na sreću izvučena bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je u prvoj kutiji ostala samo crna kuglica?
21. Dva igrača bacaju simetričnu kocku. Ako je prvi dobio veći broj, kolika je vjerojatnost da je taj broj jednak 6?

Zadaci za vježbu

22. Bacamo dvije simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost da se pojavio broj 4 ako je poznato da je zbroj znamenaka jednak 6?
23. Dva su igrača bacila kocku i prvi je igrač dobio veći broj od drugog igrača. Kolika je vjerojatnost da je taj broj jednak 4?
24. U kutiji ima 6 bijelih, 4 crne i 2 plave kuglice. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije kuglice biti bijele ako se izabiru jedna za drugom na sreću
- Bez vraćanja u kutiju,
 - S vraćanjem u kutiju?
25. U kutiji se nalaze 2 bijele i 3 crvene kuglice. Izvlačimo na sreću dvije kuglice iz te kutije bez vraćanja.
- Kolika je vjerojatnost da smo izvukli jednu bijelu i jednu crvenu kuglicu?
 - Ako je prva izvučena kuglica bijela, kolika je vjerojatnost da je druga po redu izvučena kuglica crvena?
 - Ako je jedna od kuglica bijela, kolika je vjerojatnost da je druga kuglica crvena?

Zadaci za vježbu

26. Novčić bacamo dok se ne pojavi pismo. Kolika je vjerojatnost događaja:
- Pismo se pojavilo u prva 3 bacanja,
 - Pismo se nije pojavilo u prvih 10 bacanja?
27. Tri strijelca gađaju u metu nezavisno jedan od drugog. Vjerojatnosti pogotka u metu za svakog od tri strijelca su redom 0.8, 0.6 i 0.5.
- Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena točno jednom?
 - Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena najviše jednom?
 - Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena točno dva puta?
 - Ako je meta pogođena jednim metkom, kolika je vjerojatnost da je pogodio prvi strijelac?
28. Bacamo dvije simetrične kocke. Zadani su događaji
 A – {pojavi se barem jedna jedinica}, B – {pojavi su se dva različita broja}.
- Izračunajte $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ i $P(B|A)$.
 - Jesu li događaji A i B nezavisni?

Zadaci za vježbu

29. Bacamo simetrični novčić dva puta. Zadani su događaji
A – {pismo se pojavilo u prvom bacanju},
B – {pismo se pojavilo u drugom bacanju},
C – {pismo se pojavilo točno jednom}.
Jesu li događaji A, B i C nezavisni? Jesu li događaji u parovima nezavisni?
30. Neka je $P(A) = 1/2$ i $P(B) = 1/2$. Jesu li događaji A i B nezavisni ako je
a) $P(A \cup B) = 2/3$,
b) $P(A \cup B) = 3/4$?
31. Između brojeva 1, 2, 3, 4, 5 odabire se na sreću jedan broj, a od preostalih se ponovno odabire na sreću još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da je drugi broj paran?
32. Imamo 3 jednake kutije. U prvoj kutiji ima 7 bijelih i 5 crnih kuglica, u drugoj kutiji 3 bijele i 7 crnih, a u trećoj kutiji su sve bijele. Ako slučajno odaberemo kutiju i izvučemo na sreću jednu kuglicu, kolika je vjerojatnost da je kuglica bijele boje?

Zadaci za vježbu

33. U prvoj kutiji nalaze se 2 bijele i 3 crne kuglice, a u drugoj 1 bijela i 4 crne. Iz prve kutije prebacimo u drugu dvije na sreću odabrane kuglice. Kolika je vjerojatnost da nakon toga na sreću odabrana kuglica iz druge kutije bude bijela?
34. U jednoj tvornici 30% proizvodnje otpada na stroj S_1 , 25% na S_2 , a ostalo na S_3 . Na strojevima se redom pojavljuje 1%, 1.2% i 2% škarta. Ako slučajno odaberemo jedan proizvod iz ukupne produkcije, kolika je vjerojatnost da je on loš?
35. U dva snopa karata nalaze se po 52 karte, sa po 4 asa. Iz jednog snopa izvučemo jednu kartu, a iz drugog dvije. Zatim tri izvučene karte promiješamo i otkrijemo jednu. Kolika je vjerojatnost da je ta karta as?
36. U uzorku, čiji dio čini 55% muškaraca, 70% muškaraca i 60% žena puši.
- Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba ne puši?
 - Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba, koja puši, žena?

Zadaci za vježbu

37. Jedna serija od 100 proizvoda ima 5% neispravnih, a druga serija od 75 proizvoda ima 6% neispravnih. Iz prve serije slučajno se bira 30, a iz druge 20 proizvoda i oni se stavljaju u jednu kutiju, izmiješaju, a zatim se na slučajan način uzima jedan proizvod.
- Kolika je vjerojatnost da je odabran dobar proizvod?
 - Ako je odabran dobar proizvod, kolika je vjerojatnost da on potječe iz druge serije?
38. Dva strijelca, svaki sa po jednim metkom, gađaju istu metu, nezavisno jedan od drugoga. Vjerojatnost da prvi strijelac pogodi metu iznosi 0.8, a vjerojatnost da drugi strijelac pogodi je 0.4. Ako je nakon gađanja utvrđeno da je meta pogođena jednim metkom, kolika je vjerojatnost da je to učinio prvi strijelac?
39. U kutiji se nalazi 1000 kockica, od kojih su sve ispravne osim jedne koja na svim stranama ima broj 6. Izvučena je na sreću jedna kockica i bačena četiri puta. Ako je kockica sva četiri puta pala na broj 6, kolika je vjerojatnost da je to neispravna kockica?
40. U devet od deset jednakih pregrada nalaze se 2 crne i 2 bijele kuglice, a u desetoj 5 bijelih i 1 crna. Iz na sreću odabrane pregrade izvučena je bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je izvučena iz desete pregrade?

Rješenja

1. $1/3$
2. $4/14$
3. $16/33$
4. $5/12$
5.
 - a) $2/7$
 - b) $4/35$
 - c) $6/35$
 - d) $1/35$
6.
 - a) $16/49$
 - b) $64/343$
 - c) $48/343$
 - d) $27/343$
7. A i C.

Rješenja

8. $p = 2/3$

9.

a) $14/15$

b) $3/10$

10.

a) 0.096

b) 0.936

c) 0.0256.

11. $12/35$

12. 0.78

13. $3/5$

14. $1/13$

15.

a) $16/425$

b) $425/544$

Rješenja

16.

- a) 0.002
- b) $999/2495$

17.

- a) Vjerojatnije je da slučajno odabrani strijelac promaši.
- b) Vjerojatnosti su jednake.

18. $11/50$

19. $5/11$

20. $3/7$

21. $1/3$

Rješenja zadatka za vježbu

22. $2/5$

23. $1/5$

24.

a) $5/22$

b) $1/4$

25.

a) $3/5$

b) $3/4$

c) $6/7$

26.

a) $7/8$

b) $1/1024$

27.

a) 0.26

b) 0.3

c) 0.46

d) $8/13$

Rješenja zadatka za vježbu

28.

a) $P(A) = \frac{11}{36}, P(B) = \frac{5}{9}, P(A|B) = \frac{1}{3}, P(B|A) = \frac{10}{11}.$

b) Događaji A i B nisu nezavisni.

29. Događaji A, B i C nisu nezavisni, ali jesu u parovima nezavisni.

30.

a) Ne.

b) Da.

31. $2/5$

32. $113/180$

33. $9/35$

34. 0.015

35. $1/13$

36.

a) 0.345

b) $54/131$

Rješenja zadatka za vježbu

37.

a) 0.946

b) 0.3974

38. $\frac{6}{7}$

39. $\frac{48}{85}$

40. $\frac{5}{32}$