OSNOVE DIGITALNE ELEKTRONIKE

Booleova algebra

Zdravko Kunić
zdravko.kunic@algebra.hr

Booleova algebra

Ishod 3	Primijeniti aksiome i teoreme Booleove algebre. Minimizirati (pojednostaviti) složenu logičku funkciju primjenom pravila Booleove algebre.

Sadržaj predavanja

- Booleova algebra
- Aksiomi i teoremi
- Dvočlana Booleova algebra
- Mintermi i makstermi
- Kanonski oblik funkcije

Booleova algebra

- Osnovni matematički aparat korišten u analizi i projektiranju digitalnih sklopova
  - G. **Boole**:
    "An Investigation of the Laws of Thought", London, 1854
  - C. E. **Shannon**:
    "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits", Trans.AIEE, 1938
    - efikasna primjena za analizu relejnih elektromehaničkih sklopova

Aksiomatska definicija Booleove algebre

- E. V. **Huntington**:
  "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic", 1904:
  - Formulirao 6 aksioma Booleove algebre
- Poželjno: minimalni broj postulata
- Neophodna svojstva:
  - **Konzistentnost**
    - niti jedan postulat iz skupa ne proturječi nekom drugom iz istog skupa
  - **Nezavisnost**
    - niti jedan se postulat ne da dokazati pomoću ostalih

Formalna definicija

Booleova algebra se zasniva na:

- **konačnom skupu objekata**: $S = \{A, B, C, \ldots x, y, z \ldots\}$
  - Varijable [A,B,...] $\in S$ (*varijable A,B,… su članovi skupa* S)
- **operatorima** (**+**, **·**) koji su *zatvoreni s obzirom na S*
  - dvije *binarne* operacije: **+**, **·**
  - primjena na članove skupa *S* također proizvodi člana skupa *S*
- skupu aksioma (postulata)

Aksiomi

A.1. Aksiom o neutralnim elementima

Postoje *neutralni elementi* **0** i **1** s obzirom na operatore (+ i ·):

a) $A + 0 = A$

b) $A \cdot 1 = A$

A.2. Aksiom o komplementu

Za svaki A postoji $\bar{A} \in S$ takav da vrijedi:

a) $A + \bar{A} = 1$

b) $A \cdot \bar{A} = 0$

Aksiom A.2. ne vrijedi u običnoj algebri

Aksiomi

A.3. Zakon komutacije

Operatori su komutativni:

a) $A + B = B + A$

b) $B \cdot A = A \cdot B$

A.4. Zakon distribucije

Operatori su distributivni jedan preko drugoga

a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$

b) $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

Aksiom A.4.b ne vrijedi u običnoj algebri

Hijerarhija operatora

- Komplement ($\overline{}$)
- Logičko množenje (·)
- Logičko zbrajanje (+)

Hijerarhija operatora

- **Zagrade** mijenjaju redoslijed obavljanja operacija na uobičajeni način
- Operatori se kolokvijalno nazivaju: **množenje**, **zbrajanje** i **komplementiranje**
- Radi se o **logičkim**, a <u>ne aritmetičkim</u> operacijama
  - **0** i **1** su logičke, a ne aritmetičke veličine
- **Dualnost** (metateorem o dualnosti):
  - **Zamjenom operatora i neutralnih elemenata u nekom postulatu dobiva se njegov dualni dio**, npr. ako se zamijeni 0 sa 1 (ili obrnuto) i + sa · (ili obrnuto) onda iz aksioma a) slijedi aksiom b), i obrnuto.

Teoremi

Aksiomi:

1. a) $\boldsymbol{A+0=A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 1 = A}$
2. a) $\boldsymbol{A+\bar{A}=1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot \bar{A} = 0}$
3. a) $\boldsymbol{A+B=B+A}$ b) $\boldsymbol{BA=AB}$
4. a) $\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$
   b) $\boldsymbol{A+BC=(A+B)(A+C)}$

T.1. Zakon dominacije

a) $A+1=1$

b) $A \cdot 0 = 0$

Dokaz teorema: primjena aksioma:

$A+1=(A+1)\cdot 1$	A.1b
$=(A+1)\cdot(A+\bar{A})$	A.2a
$=A+1\cdot\bar{A}$	A.4b
$=A+\bar{A}$	A.1b
$=1$	A.2a

ALGEBRA

Teoremi

Aksiomi:

1. a) $\boldsymbol{A + 0 = A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 1 = A}$
2. a) $\boldsymbol{A + \overline{A} = 1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot \overline{A} = 0}$
3. a) $\boldsymbol{A + B = B + A}$ b) $\boldsymbol{BA = AB}$
4. a) $\boldsymbol{A(B + C) = AB + AC}$
   b) $\boldsymbol{A + BC = (A + B)(A + C)}$

T.2. Zakon idempotencije

- Ponavljanje operacije ne mijenja rezultat

a) $A + A = A$

b) $A \cdot A = A$

Dokaz teorema:	primjena aksioma:
$A + A = (A + A) \cdot 1$	A.1.
$= (A + A) \cdot (A + \bar{A})$	A.2.
$= A + A \cdot \bar{A}$	A.4.b
$= A + 0$	A.2.
$= A$	A.1.

ALGEBRA

Teoremi

Aksiomi:

1. a) $\boldsymbol{A + 0 = A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 1 = A}$
2. a) $\boldsymbol{A + \overline{A} = 1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot \overline{A} = 0}$
3. a) $\boldsymbol{A + B = B + A}$ b) $\boldsymbol{BA = AB}$
4. a) $\boldsymbol{A(B + C) = AB + AC}$
   b) $\boldsymbol{A + BC = (A + B)(A + C)}$

Teoremi:

1. a) $\boldsymbol{A + 1 = 1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 0 = 0}$

T.3. Zakon involucije

- Svaki član skupa ima samo jedan komplement
- Stoga je komplement komplementa izvorni član: $\boldsymbol{\overline{\overline{A}} = A}$

T.4. Zakon apsorpcije

a) $A + AB = A$

b) $A \cdot (A + B) = A$

Dokaz teorema: primjena aksioma/teorema:

$$A + AB = A \cdot 1 + AB \qquad \text{A.1.}$$

$$= A \cdot (1 + B) \qquad \text{A.4.a}$$

$$= A \cdot 1 \qquad \text{T.1.}$$

$$= A \qquad \text{A.1.}$$

ALGEBRA

Teoremi

T.5. Zakon asocijacije

a) $(A + B) + C = A + (B + C)$

b) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Aksiom:

4. a) $\boldsymbol{A(B + C) = AB + AC}$
   b) $\boldsymbol{A + BC = (A + B)(A + C)}$

Teoremi:

2. a) $\boldsymbol{A + A = A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot A = A}$
4. a) $\boldsymbol{A + AB = A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot (A + B) = A}$

Dokaz teorema:

Supstitucije: $x = (A + B) + C,\ \ y = A + (B + C)$, ako je $x = y$ onda vrijedi $x = xy$ (zakon idempotencije)

$(A + B) + C = x \cdot y = [(A + B) + C] \cdot [A + (B + C)]$ T.2.b

$= [(A + B) + C] \cdot A + [(A + B) + C] \cdot (B + C)$ A.4.a

$= A + [(A + B) + C] \cdot (B + C)$

$= A + \{[(A + B) + C] \cdot B + [(A + B) + C] \cdot C\}$ A.4.

$= A + (B + C)$ T.4.

Pojašnjenja:

$A \cdot [(A + B) + C] = A(A + B) + AC$ A.4.a

$= A + AC = A$ T.4.b, T.4.a

$B \cdot [(A + B) + C] = B(A + B) + BC$ A.4.a

$= B + BC = B$ T.4.b, T.4.a

$C \cdot [(A + B) + C] = C(A + B) + CC$ A.4.a

$= C(A + B) + C = C$ T.2.b, T.4.a

Teoremi

T.6. De Morganov zakon

a) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cdot \overline{\boldsymbol{B}}$

b) $\overline{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$

Ako se obavi supstitucija $A + B = X$ onda je $\overline{X} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Prema A.2. vrijedi $X + \overline{X} = 1$ i $X \cdot \overline{X} = 0$ iz čega slijede pomoćni teoremi (leme): **L.1.** $(A + B) + \overline{A}\,\overline{B} = 1$

L.2. $(A + B) \cdot \overline{A}\,\overline{B} = 0$

Teoremi

T.6. De Morganov zakon

- dokaz pomoćnog teorema **L.1.**

Aksiomi:

1. a) $\boldsymbol{A + 0 = A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 1 = A}$
2. a) $\boldsymbol{A + \overline{A} = 1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot \overline{A} = 0}$
3. a) $\boldsymbol{A + B = B + A}$ b) $\boldsymbol{BA = AB}$
4. a) $\boldsymbol{A(B + C) = AB + AC}$
   b) $\boldsymbol{A + BC = (A + B)(A + C)}$

Teoremi:

1. a) $\boldsymbol{A + 1 = 1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 0 = 0}$
5. a) $\boldsymbol{(A + B) + C = A + (B + C)}$
   b) $\boldsymbol{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$

L.1. $(A + B) + \overline{A}\,\overline{B}$

$= \left(A + \overline{A}\,\overline{B}\right) + B$	A.3.a, T.5.a
$= \left(A + \overline{A}\right)\left(A + \overline{B}\right) + B$	A.4.b
$= 1 \cdot \left(A + \overline{B}\right) + B$	A.2.a
$= A + (B + \overline{B})$	A.1.b, T.5.a
$= A + 1$	A.2.a
$= 1$	T.1.a

ALGEBRA

Teoremi

Aksiomi:

2. a) $\boldsymbol{A+\overline{A}=1}$ b) $\boldsymbol{A\cdot\overline{A}=0}$

4. a) $\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$

   b) $\boldsymbol{A+BC=(A+B)(A+C)}$

Teoremi:

1. a) $\boldsymbol{A+1=1}$ b) $\boldsymbol{A\cdot 0=0}$
2. a) $\boldsymbol{A+A=A}$ b) $\boldsymbol{A\cdot A=A}$

T.6. De Morganov zakon

- dokaz pomoćnog teorema **L.2.**

L.2. $(A+B)\cdot\overline{A}\,\overline{B} = A\overline{A}\,\overline{B} + B\overline{A}\,\overline{B}$ A.4.a

$= 0\cdot\overline{B} + 0\cdot\overline{A}$ A.2.b

$= 0+0$ T.1.b

$= 0$ T.2.a

Teoremi:

5. a) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

   b) $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

6. a) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}$

   b) $\overline{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$

Teoremi

T.7. Generalizirani De Morganov zakon

a) $\overline{A+B+C+\ \ldots}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\ \ldots$

b) $\overline{A\cdot B\cdot C\cdot\ \ldots}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ \ldots$

Dokaz teorema:	primjena teorema:
$\overline{A+B+C}=\overline{A+X}$	supstitucija $X=B+C$
$=\overline{A}\cdot\overline{X}$	T.6.a
$=\overline{A}\cdot\overline{(B+C)}$	supstitucija za X
$=\overline{A}\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C})$	T.6.a
$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	T.5.b

Teoremi

Aksiomi:

1. a) $\boldsymbol{A+0=A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 1 = A}$

2. a) $\boldsymbol{A+\overline{A}=1}$ b) $\boldsymbol{A\cdot\overline{A}=0}$

4. a) $\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$
   b) $\boldsymbol{A+BC=(A+B)(A+C)}$

T.8. Zakon simplifikacije

a) $AB+A\overline{B}=A$

b) $(A+B)\cdot(A+\overline{B})=A$

<u>Dokaz teorema: primjena aksioma:</u>

$AB+A\overline{B}=A\cdot(B+\overline{B})$	A.4.a
$=A\cdot 1$	A.2.a
$=A$	A.1.b

ALGEBRA

Booleove funkcije

Različiti izrazi → ista tablica → ista funkcija

Primjer:

$$f = AB + A\overline{B}$$
$$f = A$$

A	B	AB	$\overline{B}$	$A\overline{B}$	$AB + A\overline{B}$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Minterm

Logička operacija **umnoška** koja **za jednu od** mogućih ulaznih **kombinacija** na izlazu daje **jedinicu** (**1**)

- Realizira se logičkim sklopom I
- Broj različitih minterma ovisi o broju varijabli (ulaza) i iznosi 2^n, gdje je n broj varijabli (ulaza)
  - Npr. s dvije ulazne varijable moguće je dobiti četiri različita minterma jer je ulazne varijable moguće pomnožiti na četiri različita načina:

$$\bar{A} \cdot \bar{B}, \qquad \bar{A} \cdot B, \qquad A \cdot \bar{B}, \qquad A \cdot B$$

Minterm - primjer

- Realizacija minterma $\boldsymbol{m_2}$ s tri ulazne varijable
- Za minterm $\boldsymbol{m_2}$ izlaz je **1** za ulaznu kombinaciju **010**
- Logička jednadžba minterma: $\boldsymbol{m_2 = \overline{A}B\overline{C}}$

A	B	C	m_2
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Zbroj minterma - primjer

- Kad je potrebno ostvariti logičku operaciju koja na izlazu daje **jedinicu (1)** za više ulaznih kombinacija, koristi se **logički zbroj minterma**

$$\boldsymbol{Y = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}}$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	0
1	1	1	0

Maksterm

Logička operacija **zbroja** koja samo **za jednu od** mogućih ulaznih **kombinacija** na izlazu daje **nulu** (**0**)

- Realizira se logičkim sklopom ILI
- Broj različitih maksterma ovisi o broju varijabli (ulaza) i iznosi 2^n, gdje je n broj varijabli (ulaza)
  - Npr. s dvije ulazne varijable moguće je dobiti četiri različita maksterma jer je ulazne varijable moguće zbrojiti na četiri različita načina:

$$\overline{A} + \overline{B}, \qquad \overline{A} + B, \qquad A + \overline{B}, \qquad A + B$$

Maksterm - primjer

- Realizacija maksterma M_2 s tri ulazne varijable
- Za maksterm M_2 izlaz je **0** za ulaznu kombinaciju **010**
- Logička jednadžba maksterma:

$$M_2 = A + \overline{B} + C$$

A	B	C	M_2
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	**0**
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Umnožak maksterma - primjer

- Kad je potrebno ostvariti logičku operaciju koja na izlazu daje **nulu** (**0**) za više ulaznih kombinacija, koristi se **logički umnožak maksterma**

$$\boldsymbol{Y = (A + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C})}$$

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	**0**
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	**0**
1	1	0	1
1	1	1	1

Zbroj minterma i umnožak maksterma

Od kombinacija varijabli za koje funkcija ima vrijednost **1** dobije se **zbroj minterma**

- Minterm mora imati vrijednost 1 kad se u njega uvrsti odgovarajuća kombinacija vrijednosti varijabli

Od kombinacija za koje funkcija ima vrijednost **0** dobije se **umnožak maksterma**

- Maksterm mora imati vrijednost 0 kad se u njega uvrsti odgovarajuća kombinacija vrijednosti varijabli

Zadatak – prikažite funkciju u obliku sume minterma i produkta maksterma

A	B	C	f	mintermi	Makstermi
0	0	0	**1**	m_0	
0	0	1	**0**		M_1
0	1	0	**0**		M_2
0	1	1	**1**	m_3	
1	0	0	**1**	m_4	
1	0	1	**0**		M_5
1	1	0	**1**	m_6	
1	1	1	**0**		M_7

mintermi
$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
$m_3 = \overline{A}\,B\,C$
$m_4 = A\,\overline{B}\,\overline{C}$
$m_6 = A\,B\,\overline{C}$

Makstermi
$M_1 = A + B + \overline{C}$
$M_2 = A + \overline{B} + C$
$M_5 = \overline{A} + B + \overline{C}$
$M_7 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Rješenje

Funkcija kao **suma minterma**:

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$

$$= \sum(0,3,4,6)$$

Funkcija kao **produkt Maksterma**:

$$f = (A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

$$= \prod(1,2,5,7)$$

mintermi
$m_0 = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$
$m_3 = \bar{A}\,B\,C$
$m_4 = A\,\bar{B}\,\bar{C}$
$m_6 = A\,B\,\bar{C}$

Makstermi
$M_1 = A + B + \bar{C}$
$M_2 = A + \bar{B} + C$
$M_5 = \bar{A} + B + \bar{C}$
$M_7 = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

Kanonski oblik logičke funkcije Određivanje logičkog izraza iz tablice

$f = A\bar{B} + \bar{A}B$ funkcija Isključivo ILI (eXclusive OR; XOR)

v_i = vrijednost funkcije za ulaznu kombinaciju i

m_i = minterm; M_i = maksterm; $i = 0,1,\ldots(r-1)$; r = broj redaka

Standardna struktura tablice: rastući redoslijed binarnih brojeva

A	B	$A\bar{B}$	$\bar{A}B$	f	m_i	M_i
0	0	0	0	$0 = v_0$		$M_0 = A + B$
0	1	0	1	$1 = v_1$	$m_1 = \bar{A} \cdot B$	
1	0	1	0	$1 = v_2$	$m_2 = A \cdot \bar{B}$	
1	1	0	0	$0 = v_3$		$M_3 = \bar{A} + \bar{B}$

Vrijednost funkcije 1

A	B	$A\bar{B}$	$\bar{A}B$	f
0	0	0	0	$0 = v_0$
0	**1**	**0**	**1**	$\mathbf{1 = v_1}$
1	**0**	**1**	**0**	$\mathbf{1 = v_2}$
1	1	0	0	$0 = v_3$

- Drugi i treći redak tablice:

a) $\boldsymbol{A = 0; B = 1}$ (v_1)

b) $\boldsymbol{A = 1; B = 0}$ (v_2)

- Napisano drugačije:

a) $\boldsymbol{\bar{A} = 1; B = 1 \rightarrow \bar{A}B = 1}$

b) $\boldsymbol{A = 1; \bar{B} = 1 \rightarrow A\bar{B} = 1}$

$$f = \boldsymbol{\bar{A}B + A\bar{B}}$$

- Općenito:

$$f = \sum_{i=0}^{r-1} v_i m_i$$

v_i je vrijednost funkcije u i-tom retku, a $r = 2^n$ gdje n predstavlja broj varijabli

Vrijednost funkcije 0

A	B	$A\bar{B}$	$\bar{A}B$	f
0	**0**	**0**	**0**	$\mathbf{0 = v_0}$
0	1	0	1	$1 = v_1$
1	0	1	0	$1 = v_2$
1	**1**	**0**	**0**	$\mathbf{0 = v_3}$

- Prvi i četvrti redak tablice:

a) $\boldsymbol{A = 0; B = 0} \quad (v_0)$

b) $\boldsymbol{A = 1; B = 1} \quad (v_3)$

- Napisano drugačije:

a) $\boldsymbol{A = 0; B = 0} \rightarrow \boldsymbol{A + B = 0}$

b) $\boldsymbol{\bar{A} = 0; \bar{B} = 0} \rightarrow \boldsymbol{\bar{A} + \bar{B} = 0}$

$$f = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{\bar{A}} + \boldsymbol{\bar{B}})$$

- Općenito:

$$f = \prod_{i=0}^{r-1} (v_i + M_i)$$

v_i je vrijednost funkcije u i-tom retku, a $r = 2^n$ gdje n predstavlja broj varijabli

Dokaz jednakosti sume minterma i produkta maksterma

Aksiomi:

1. a) $\boldsymbol{A+0=A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 1=A}$
2. a) $\boldsymbol{A+\overline{A}=1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot \overline{A}=0}$
3. a) $\boldsymbol{A+B=B+A}$ b) $\boldsymbol{BA=AB}$
4. a) $\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$
   b) $\boldsymbol{A+BC=(A+B)(A+C)}$

$$f = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}})$$

$$= \boldsymbol{A\overline{A}} + \boldsymbol{\overline{A}B} + \boldsymbol{A\overline{B}} + \boldsymbol{B\overline{B}} \qquad \text{A.4.}$$

$$= 0 + \boldsymbol{\overline{A}B} + \boldsymbol{A\overline{B}} + 0 \qquad \text{A.2.a}$$

$$= \boldsymbol{\overline{A}B} + \boldsymbol{A\overline{B}} \qquad \text{A.1.}$$

$$= \boldsymbol{A\overline{B}} + \boldsymbol{\overline{A}B} \qquad \text{A.3.}$$

Skraćeno pisanje standardne tablice kombinacija

$$f(A,B) = \underbrace{\bar{A}B}_{\substack{01\\ \downarrow \\ 1}} + \underbrace{A\bar{B}}_{\substack{10\\ \downarrow \\ 2}} = \sum(m_1, m_2) = \sum(1,2)$$

$$f(A,B) = (\underbrace{A + B}_{\substack{0\ 0\\ \downarrow \\ 0}}) \cdot (\underbrace{\bar{A} + \bar{B}}_{\substack{1\ 1\\ \downarrow \\ 3}}) = \prod(M_0, M_3) = \prod(0,3)$$

Pretvorba nekanonskog oblika funkcije u kanonski

Aksiomi:

1. a) $\boldsymbol{A + 0 = A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 1 = A}$
2. a) $\boldsymbol{A + \bar{A} = 1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot \bar{A} = 0}$
4. a) $\boldsymbol{A(B + C) = AB + AC}$
   b) $\boldsymbol{A + BC = (A + B)(A + C)}$

1. metoda: množenje svakog člana s $(X + \bar{X})$
gdje su X nedostajuće varijable

Primjer:

$$Y = \bar{A} + \bar{B} \cdot C$$

$$= \bar{A}(B + \bar{B})(C + \bar{C}) + \bar{B}C(A + \bar{A}) \qquad \text{A.1.b, A.2.a}$$

$$= \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \cancel{\bar{A}\bar{B}C} \qquad \text{A.4.}$$

$$= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C = \sum(0,1,2,3,5)$$

Pretvorba nekanonskog oblika funkcije u kanonski

2. metoda: uvrštavanjem **0** i **1** konstruirati standardnu tablicu kombinacija

$$Y = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{C}$$

$$Y = \sum (0,1,2,3,5)$$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}C$	$\overline{A} + \overline{B}C$	m_i
0	0	0	1	0	1	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	1	1	1	$m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,C$
0	1	0	1	0	1	$m_2 = \overline{A}\,B\,\overline{C}$
0	1	1	1	0	1	$m_3 = \overline{A}\,B\,C$
1	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	1	1	$m_5 = A\,\overline{B}\,C$
1	1	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	

Pretvorba funkcije u drugi kanonski oblik

1. metoda: svakom članu dodati $\boldsymbol{X\overline{X}}$ gdje su $\boldsymbol{X}$ nedostajuće varijable

Primjer:

$$
\begin{aligned}
Y &= A(A+B) & \\
&= (A+B\overline{B})(A+B) & \text{A.2.b, A.1.a} \\
&= (A+B)(A+\overline{B})\cancel{(A+B)} & \text{A.4.b} \\
&= (A+B)(A+\overline{B}) & \text{T.2.} \\
&= \prod(0,1) &
\end{aligned}
$$

Aksiomi:

1. a) $\boldsymbol{A+0=A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 1 = A}$
2. a) $\boldsymbol{A+\overline{A}=1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot \overline{A} = 0}$
4. a) $\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$
   b) $\boldsymbol{A+BC=(A+B)(A+C)}$

Teoremi:

2. a) $\boldsymbol{A+A=A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot A = A}$

2. metoda: uvrštavanjem **0** i **1** konstruirati standardnu tablicu kombinacija

Komplementarna funkcija

Funkcija kojoj su vrijednosti komplementirane onima izvorne funkcije (0,1 → 1,0)

- Primjer:

A	B	f	$\overline{f}$	m_i	M_i
0	0	1	0	$\overline{A}\,\overline{B}$	$A+B$
0	1	0	1	$\overline{A}\,B$	$A+\overline{B}$
1	0	0	1	$A\,\overline{B}$	$\overline{A}+B$
1	1	0	1	$A\,B$	$\overline{A}+\overline{B}$

$$f=\sum_{i=0}^{r-1} v_i\, m_i$$

$$\overline{f}=\sum_{i=0}^{r-1} \overline{v_i} m_i$$

- v_i je vrijednost funkcije u i-tom retku

Komplement funkcije - primjer

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC$$

$$\bar{f} = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC}$$

$$= (\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}})(\overline{\bar{A}\bar{B}C})(\overline{\bar{A}BC})$$

$$= (\overline{\bar{A}\bar{B}} + C)(\overline{\bar{A}\bar{B}} + \bar{C})(\overline{\bar{A}B} + \bar{C})$$

$$= (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})$$

$$= M_0 M_1 M_3$$

Primjena De Morganovog zakona u algebarski zadanoj funkciji

$$f(A,B) = \overline{A}\,\overline{B}$$

$$\overline{f}(A,B) = \overline{\overline{A}\,\overline{B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = A + B$$

Odnosi između minterma i maksterma: $m_i = \overline{M_i}$

Dualna funkcija

Dualna funkcija se dobiva tako da se međusobno zamijene operatori i, ako postoje u izrazu, konstante 0 i 1.

- Funkcija $f = f(A, B, C, \ldots, +, \cdot, \overline{}, 0,1)$
- Dualna funkcija $f_D = f(A, B, C, \ldots, \cdot, +, \overline{}, 1,0)$

Primjer: $f = A\overline{B} + CD$ zamjena operatora $+$ i $\cdot$

$$f_D = (A + \overline{B}) \cdot (C + D) = AC + C\overline{B} + AD + \overline{B}D$$

Dualna funkcija *vs* dualni oblik funkcije

- Dualni izrazi dvaju međusobno jednakih Booleovih izraza će također biti međusobno jednaki
  - To se svojstvo može iskoristiti za pretvorbu oblika funkcije koja je zadana kao **suma produkata** u njezin dualni oblik, a to je **produkt suma-članova**
- Ista funkcija može biti zadana u dva međusobno dualna oblika, međutim, **dualna funkcija nije ista funkcija**

Primjer: $f = A\overline{B} + CD$ *funkcija*

$f_D = (A + \overline{B}) \cdot (C + D) = AC + C\overline{B} + AD + \overline{B}D$ *dualna funkcija od f*

$[f_D]_D = (A + C)(C + \overline{B})(A + D)(\overline{B} + D)$ *dualni oblik funkcije f*

$f = [f_D]_D \qquad f \neq f_D$

Dualna funkcija - primjena

Generalizirani De Morganov teorem:

$$\overline{A + B + C + \ldots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \ldots$$

Komplement funkcije se može dobiti tako da se sve varijable zamijene komplementima, a zatim se konstruira dualna funkcija:

$$\overline{f}(A, B, C, \ldots) = f_D(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots)$$

Primjer:

$$f(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,B\,C$$

$$f\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right) = A\,B\,C + A\,B\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C}$$

$$\overline{f} = f_D(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + \overline{C})$$

Broj funkcija s jednom i dvije varijable

- Funkcije jedne varijable

A	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = A$$
$$f_2 = 1$$
$$f_3 = \bar{A}$$

- Funkcije dviju varijabi

AB	f_0	f_l	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
00	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
01	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
10	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
11	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

Broj mogućih funkcija za n varijabli

n	2^n	2^{2^n}
1	2	4
2	4	16
3	8	256
4	16	65 536
5	32	4 294 967 296

Funkcije dviju varijabli 1/2

Funkcija	Simbol za operator	Ime	Primjedbe
$f_0 = 0$		nula	binarna konstanta
$f_1 = AB$	$A \cdot B$	I-funkcija	konjunkcija
$f_2 = A\bar{B}$	A / B	inhibicija	B inhibira A
$f_3 = A$		identitet	prijenos (nepromijenjene) varijable
$f_4 = \bar{A}B$	B / A	inhibicija	A inhibira B
$f_5 = B$		identitet	prijenos (nepromijenjene) varijable
$f_6 = A\bar{B} + \bar{A}B$	$A \oplus B$	isključivo ILI	ili A ili B, ali ne oboje
$f_7 = A + B$	$A + B$	ILI-funkcija	disjunkcija; ili A ili B ili oboje

Funkcije dviju varijabli 2/2

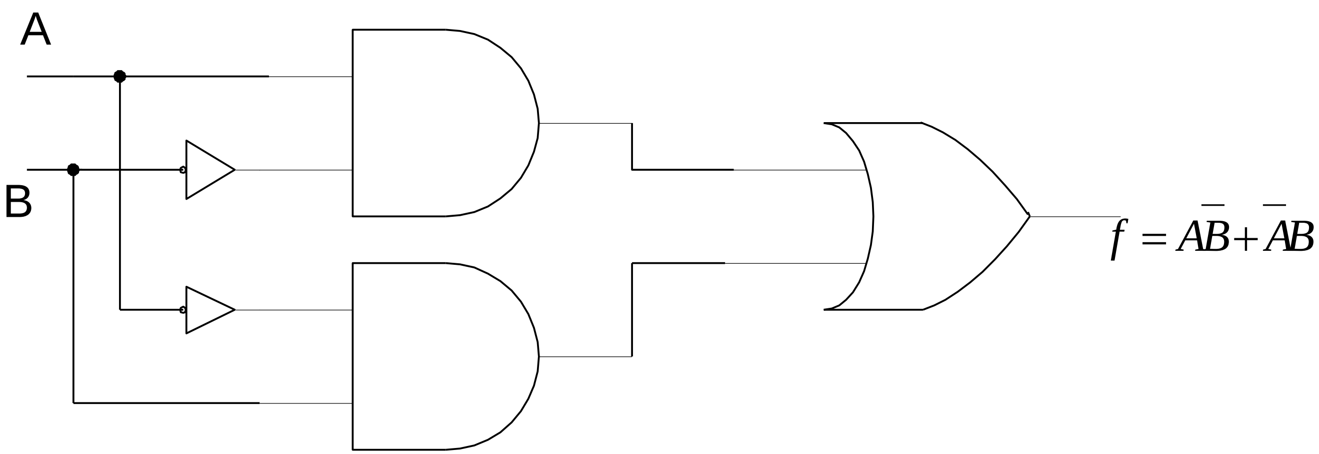
Funkcija	Simbol za operator	Ime	Primjedbe
$f_8 = \overline{A + B}$	$A \downarrow B$	**NILI**	NE-ILI
$f_9 = AB + \bar{A}\bar{B}$	$A \odot B$	**ekvivalencija**	A i B su jednaki
$f_{10} = \bar{B}$	$\bar{B}$	**komplement**	NE-B
$f_{11} = A + \bar{B}$	$B \supset A$	**implikacija**	Ako B, onda A
$f_{12} = \bar{A}$	$\bar{A}$	komplement	NE-A
$f_{13} = \bar{B} + A$	$A \supset B$	implikacija	Ako A, onda B
$f_{14} = \overline{AB}$	$A \uparrow B$	**NI**	NE-I
$f_{15} = 1$		jedan	Binarna konstanta

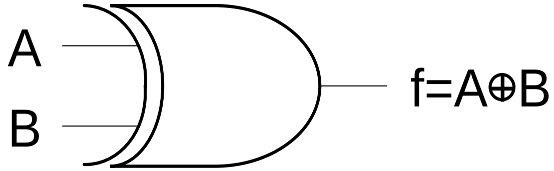
Realizacija i simboli

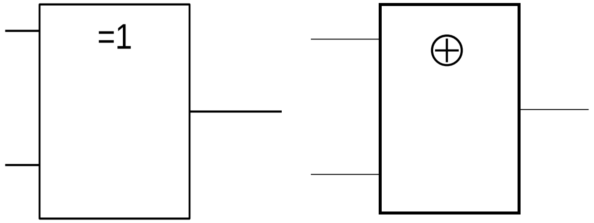
Funkcija ISKLJUČIVO ILI (XOR)

Vrijednost funkcije je 1 samo kad je isključivo na jednom od ulaza 1

A	B	$f_6 = A\bar{B} + \bar{A}B = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



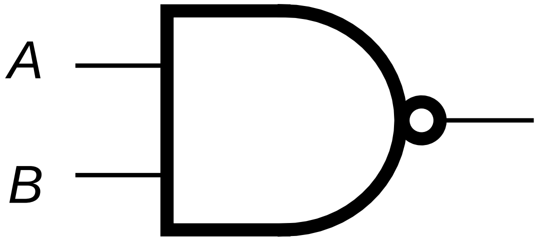




Funkcije NI i NILI

NI

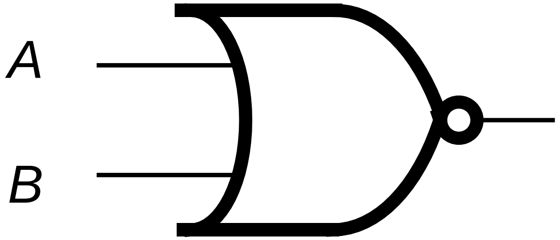
- Komplementirana funkcija I
- $f_{NI} = \overline{X_0 X_1 \ldots X_n}$



A	B	$f_{14} = \overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NILI

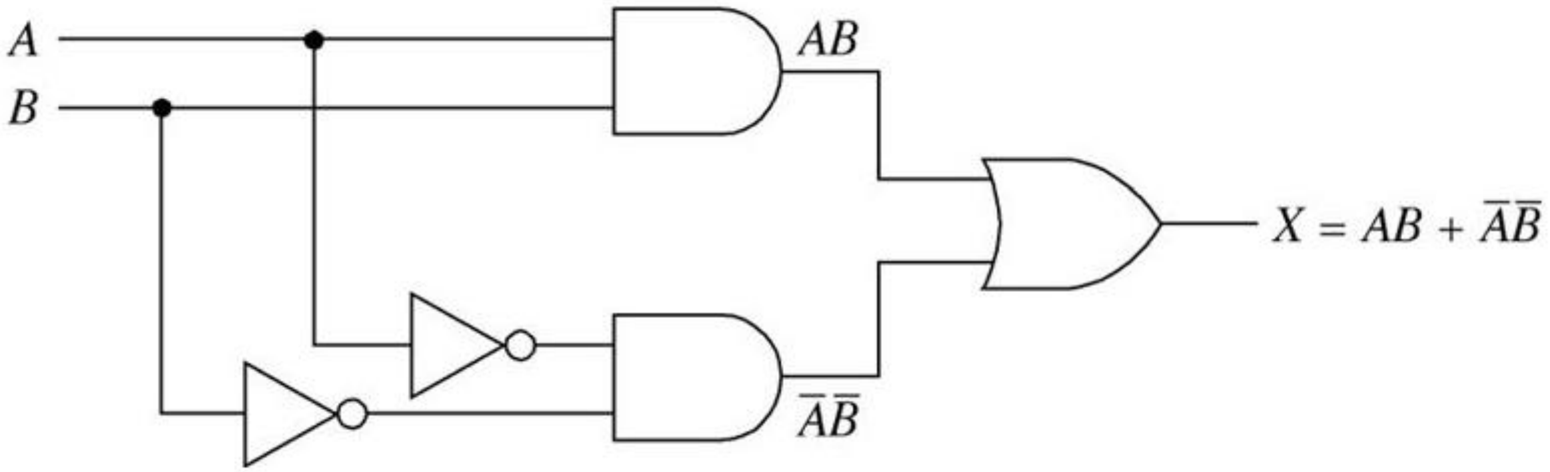
- Komplementirana funkcija ILI
- $f_{NILI} = \overline{X_0 + X_1 + \ldots + X_n}$

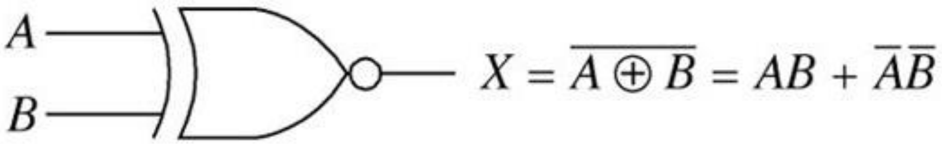


A	B	$f_8 = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Funkcija ISKLJUČIVO NILI (ekvivalencija)

Vrijednost funkcije je 1 ako su joj obje ulazne varijable jednake

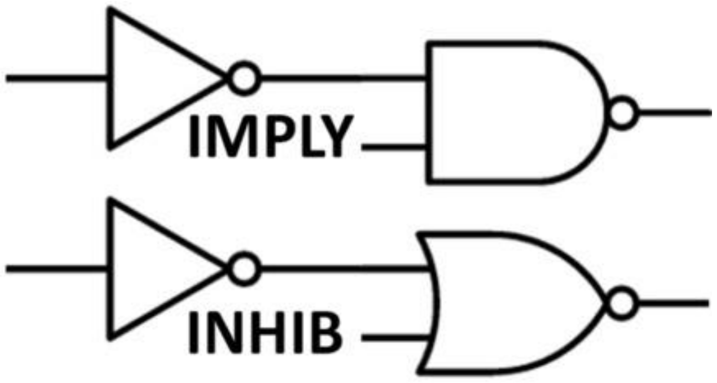




A	B	$f_9 = AB + \bar{A}\bar{B}$ $A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Implikacija i inhibicija

- **Implikacija**
  - Ako je ulaz B u stanju 1, on podrazumijeva (implicira) varijablu A



- **Inhibicija**
  - Ako je ulaz B u stanju 1, on priječi (inhibira) prolaz varijable A

A	B	$f_{11} = A + \bar{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

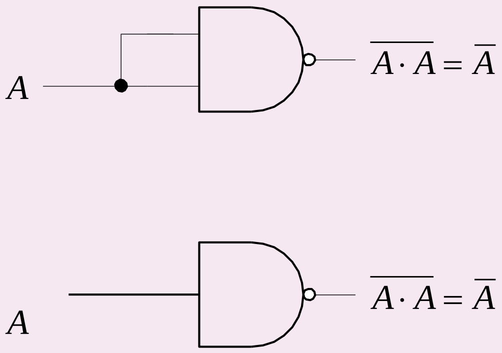
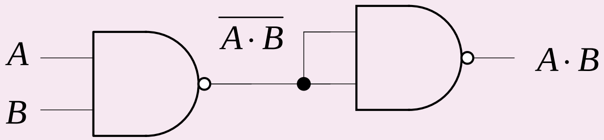
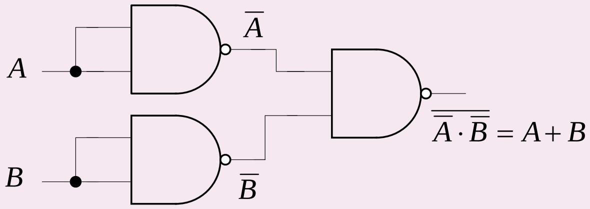
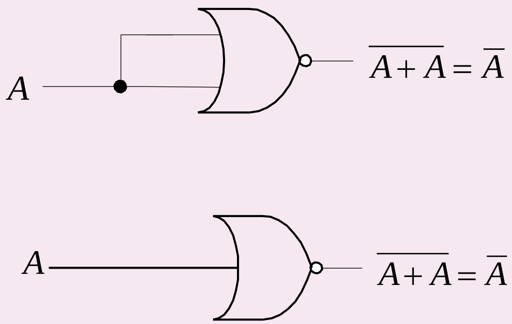
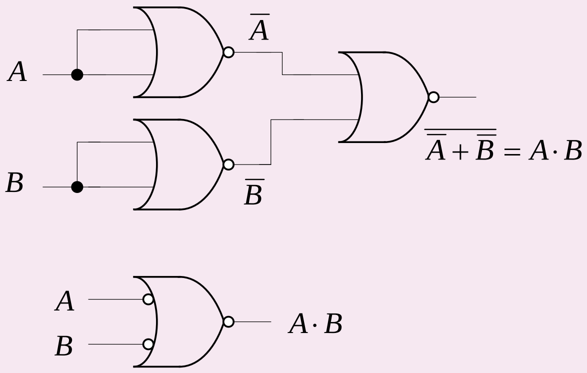
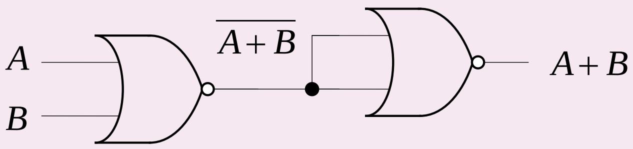
A	B	$f_2 = A\bar{B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Skupine osnovnih (primitivnih) funkcija

- **I, ILI i NE**
  - Osnovni skup funkcija I, ILI i NE je redundantan (i bez sva tri se mogu realizirati sve funkcije)
- **I i NE**
  - Ako se A i B invertiraju prije ulaska u I sklop i rezultat ponovno invertira, primjenom De Morganova teorema se dobiva: $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = A + B$
- **ILI i NE**
  - Ako se A i B invertiraju prije ulaska u ILI sklop i rezultat ponovno invertira, primjenom De Morganova teorema se dobiva: $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}} = AB$

	NE	I	ILI
• **NI** **Univerzalna funkcija:**	$\overline{A \cdot A} = \overline{A}$	$\overline{\overline{AB}} = AB$	$\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A + B$
• **NILI** **Univerzalna funkcija:**	$\overline{A + A} = \overline{A}$	$\overline{\overline{A + B}} = A + B$	$\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$

Implementacija I, ILI i NE s univerzalnim funkcijama

	NE	I	ILI
NI			
NILI			

Funkcije tri i više varijabli

- Skupina **I, ILI, NE**
  - proizvoljan broj varijabli
- **Isključivo ILI**
  - primjer za 3 varijable (neparna funkcija):

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

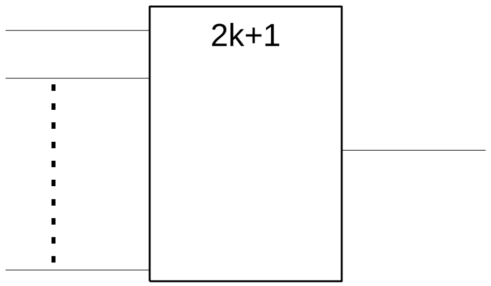
$$f_{(A,B,C)} = A \oplus B \oplus C$$

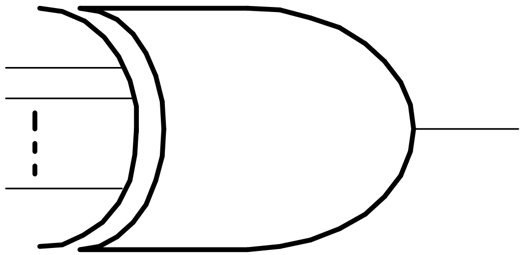
$$= A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + ABC + \bar{A}\bar{B}C$$

A	B	C	$A \oplus B \oplus C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Važnost EX-ILI

- aritmetički sklopovi
- zaštita poruka od pogrešaka prilikom prijenosa
- generiranje pseudo-slučajnih nizova (kodiranje, kriptiranje)





Primjer EX-ILI funkcije

A	B	$Y = A\bar{B} + \bar{A}B = A \oplus B = (A+B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$	Karakteristični mintermi i makstermi
0	0	0	Za **A=B=0** maksterm ima vrijednost 0
0	1	1	Za **A<>B** minterm ima vrijednost 1
1	0	1	
1	1	0	Za **A=B=1** maksterm ima vrijednost 0

Funkcije s n ulaznih varijabli

Ekvivalencija (isključivo NILI)

- Izlaz je jednak 1 kad su svi bitovi 0 ili kad su svi bitovi 1

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n + x_1x_2\ldots x_n$$

NI funkcija

- Izlaz je jednak 0 kad su svi ulazni bitovi 1

$$f_{NI} = \overline{X_0X_1\ldots X_n}$$

NILI funkcija

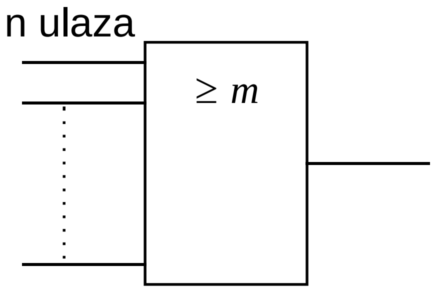
- Izlaz je jednak 1 kad su svi ulazni bitovi 0

$$f_{NILI} = \overline{X_0 + X_1 + \ldots + X_n}$$

Još neke funkcije s više varijabli

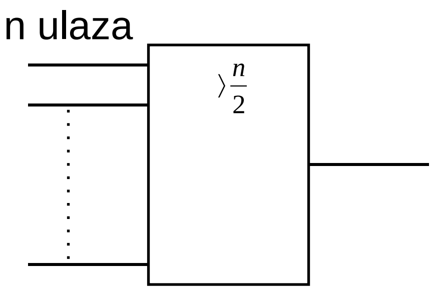
Logički prag

- $\geq m$ ulaza u 1, $m < n$



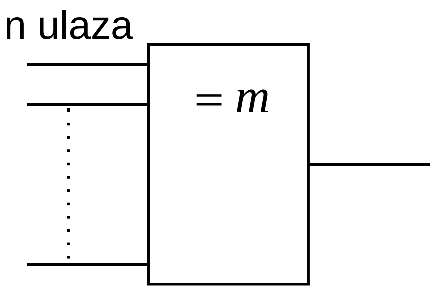
Majoritet (glasanje)

- većinska funkcija; više od $n/2$ ulaza u 1



Samo m

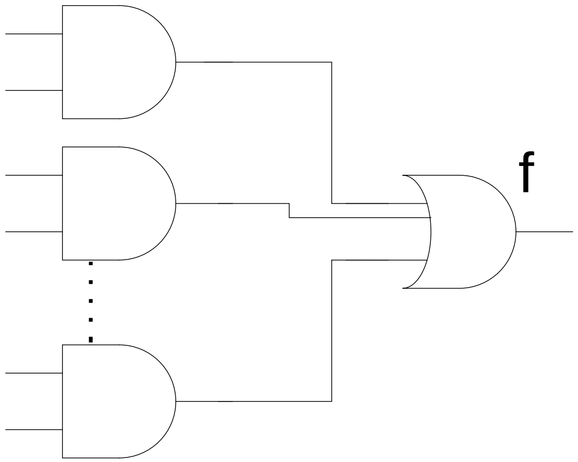
- upravo m ulaza u 1, $m < n$



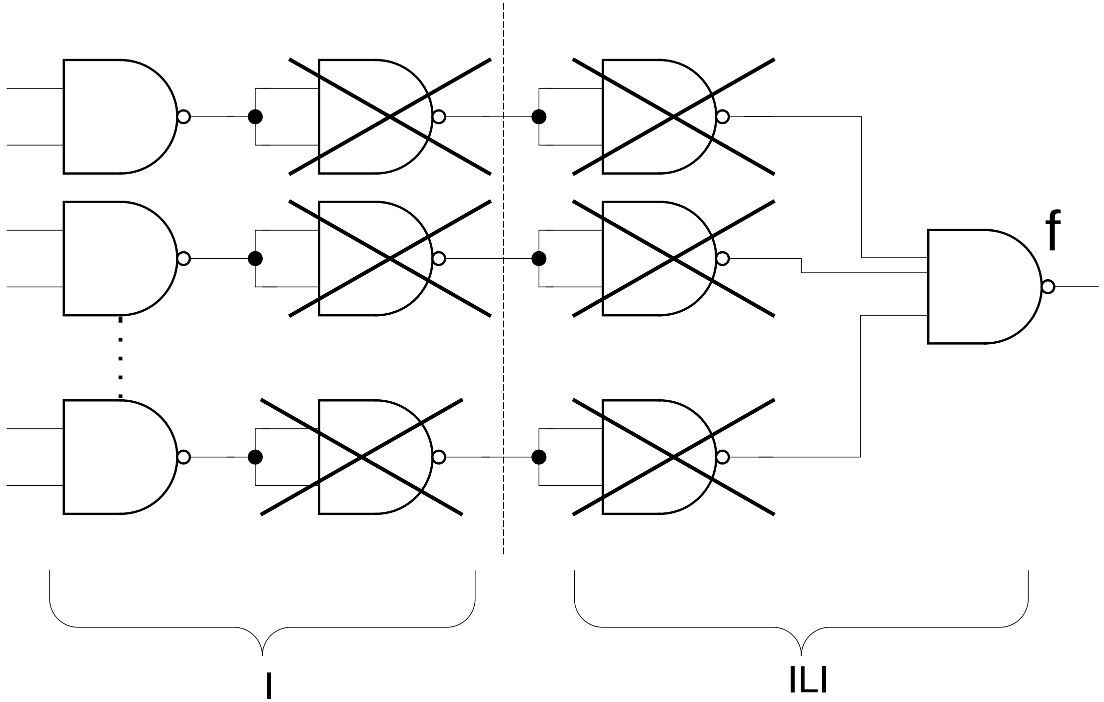
Pretvaranje funkcije u NI-oblik

Zamjena osnovnih funkcija (I,ILI i NE) s funkcijom NI

f = suma produkata



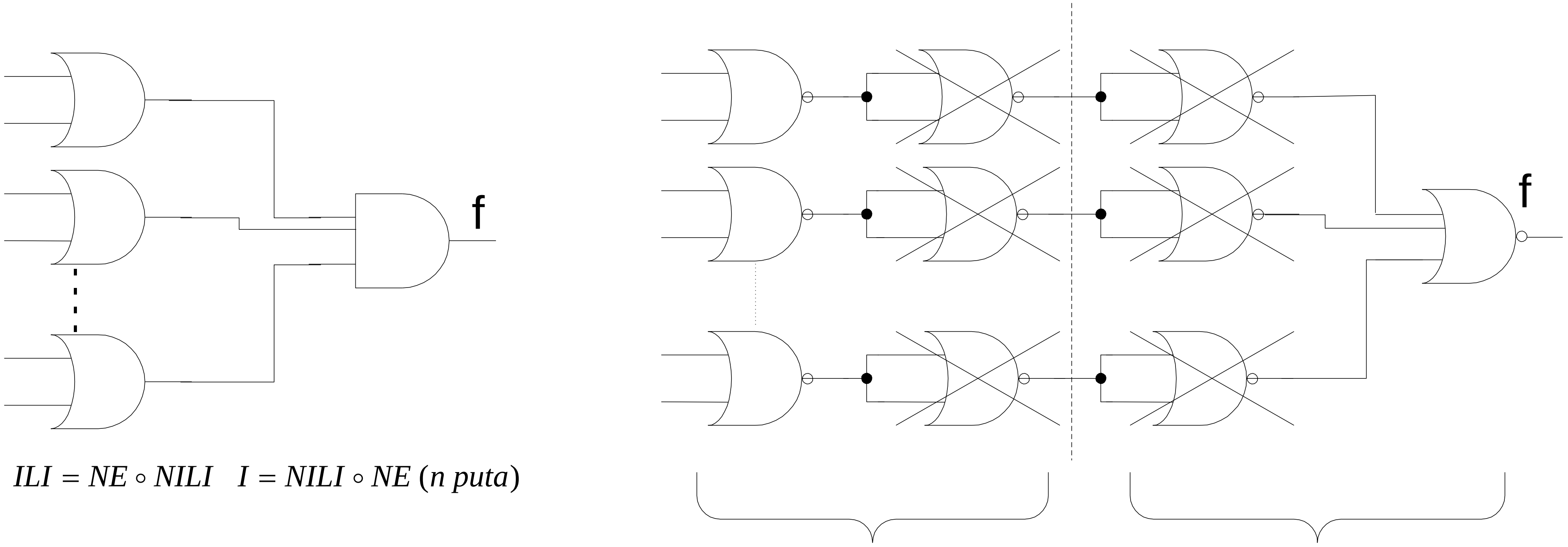
$I = NE \circ NI \qquad ILI = NI \circ NE\ (n\ puta)$



Pretvaranje funkcije u NILI-oblik

Zamjena osnovnih funkcija (I,ILI i NE) s funkcijom NILI

f = produkt suma



$$ILI = NE \circ NILI \quad I = NILI \circ NE\ (n\ puta)$$

Algebarska metoda pretvorbe u NI i NILI

Metoda supstitucije:

- Primijeniti T3 (involucija) za eliminaciju dvostruke primjene funkcije NE
- Primijeniti T8 (de Morganov zakon)

Teoremi:

3. $\bar{\bar{A}} = A$

8. a) $\overline{A + B + C + \ldots} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \ldots$

   b) $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot \ldots} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \ldots$

- Primjer pretvorbe u NI:

$$f = A + B\bar{C} = \overline{\overline{A + B\bar{C}}} = \overline{(\bar{A}) \cdot (\overline{B\bar{C}})}$$

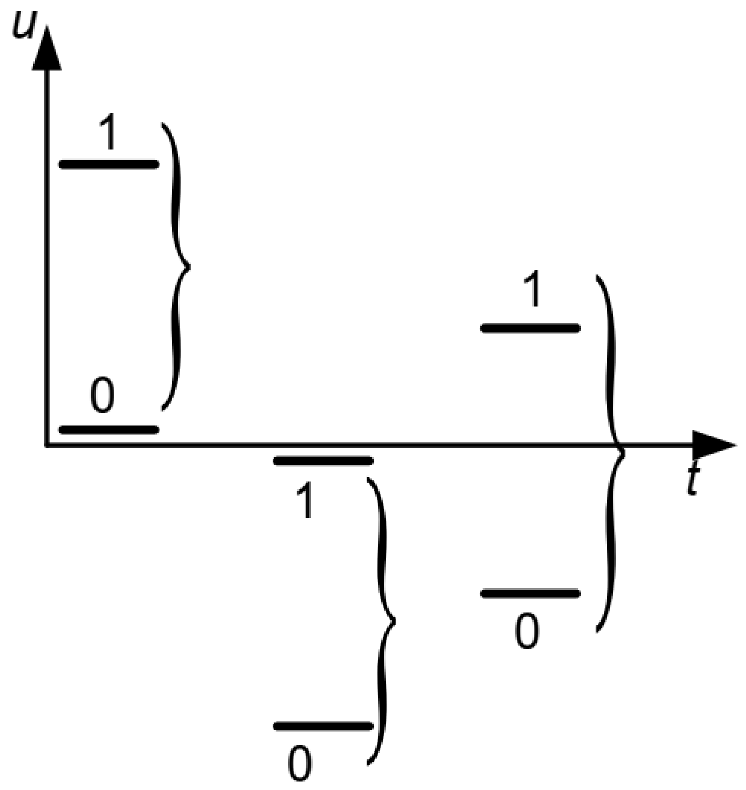
- Primjer pretvorbe u NILI:

$$f = \overline{\overline{A(B + \bar{C})(D + E)}} = \overline{\bar{A} + (\overline{B + \bar{C}}) + (\overline{D + E})}$$

Pozitivna i negativna logika

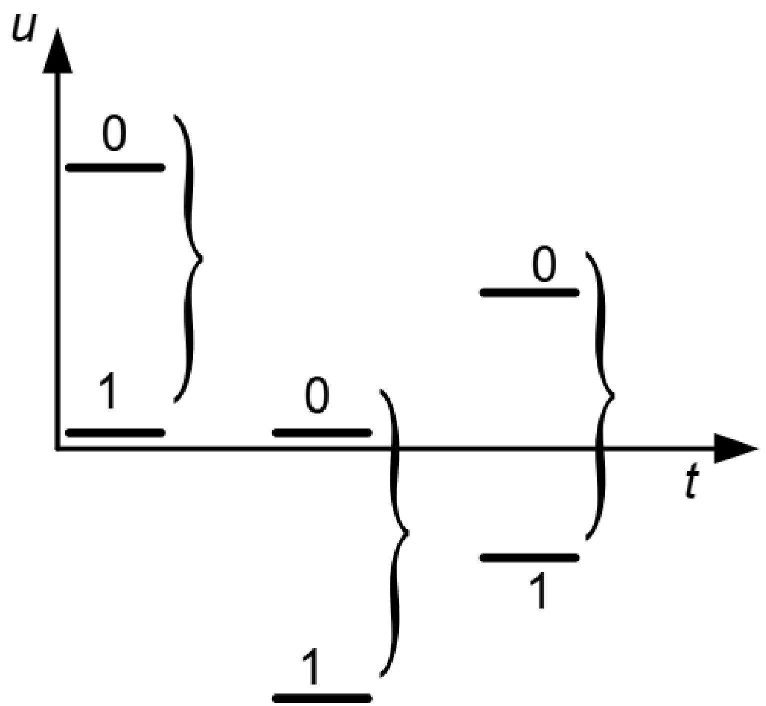
Pozitivna logika

viši napon = 1, niži napon = 0



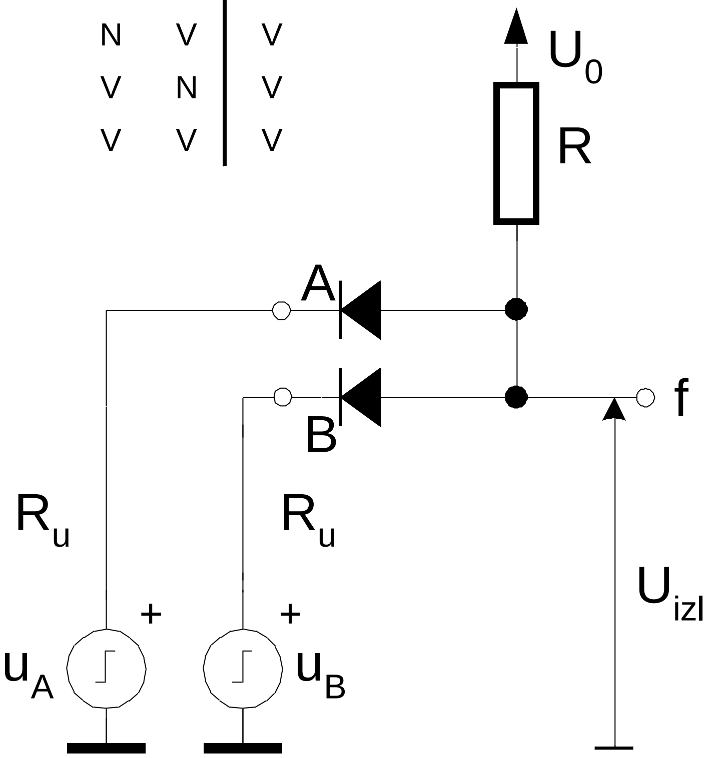
Negativna logika

viši napon = 0, niži napon = 1



Primjer - diodni I sklop

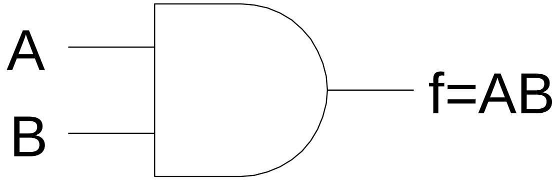
A	B	f
N	N	N
N	V	V
V	N	V
V	V	V



pozitivna logika

N=0, V=1

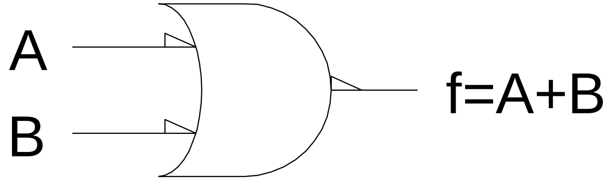
A	B	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



negativna logika

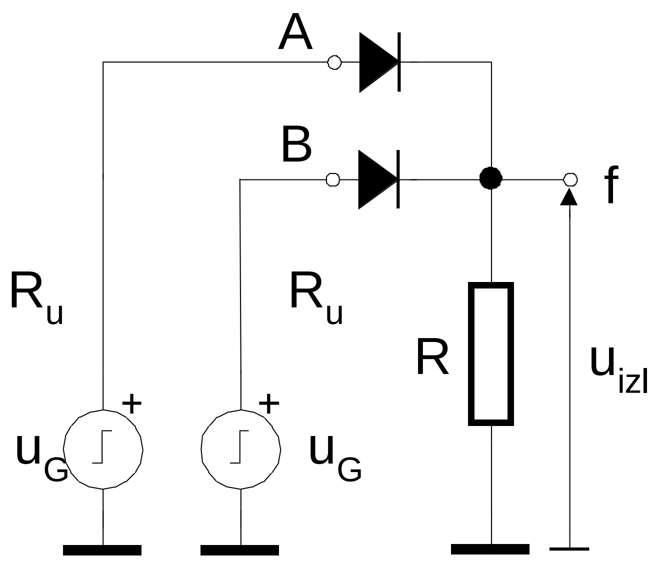
N=1, V=0

A	B	f
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



Primjer - diodni ILI sklop

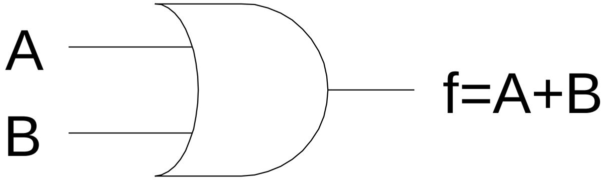
A	B	f
N	N	N
N	V	V
V	N	V
V	V	V



pozitivna logika

N=0, V=1

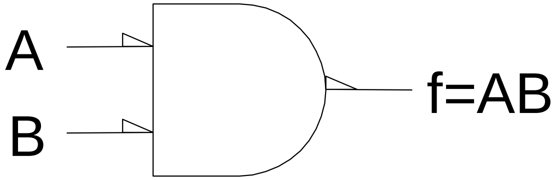
A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



negativna logika

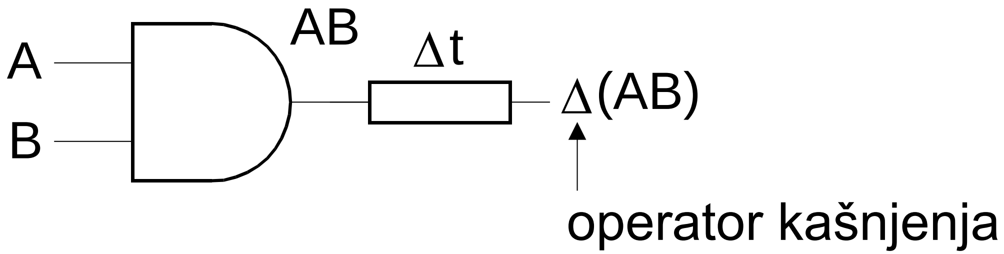
N=1, V=0

A	B	f
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



Vremenski hazard (rizik)

- S obzirom na ponašanje sklopa:
  - **statički**
  - **dinamički**

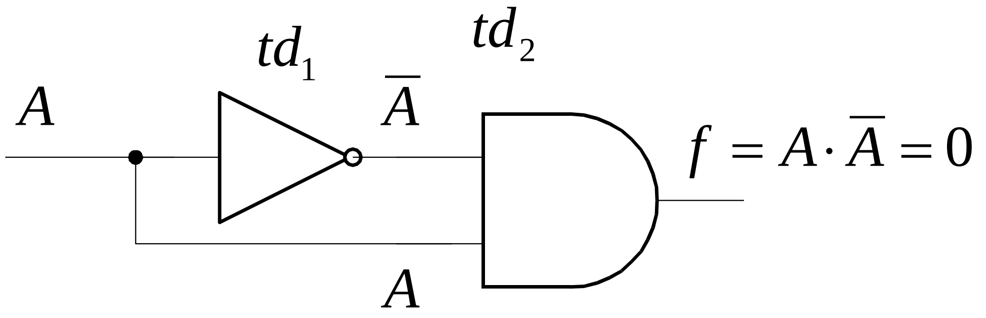


- S obzirom na uzrok:
  - **funkcijski**
  - **logički** – uzrokovan određenom izvedbom logičke funkcije – može se spriječiti promjenom izvedbe sklopa

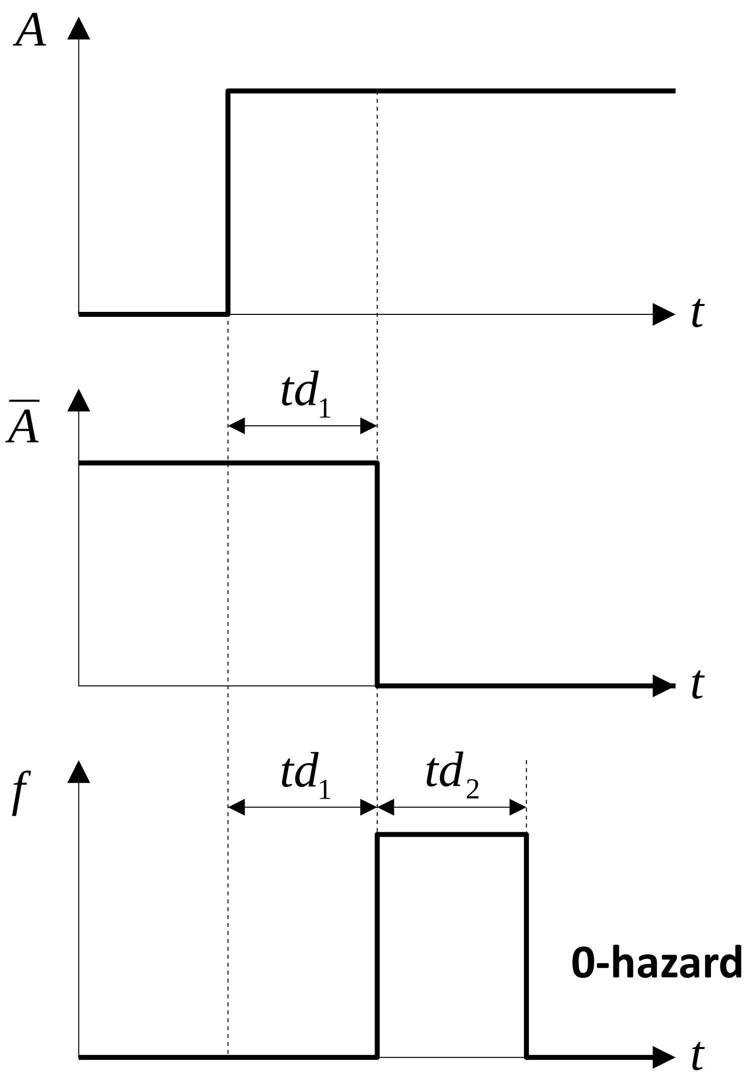
Logička funkcija koju obavlja kombinacijski sklop
je ispravna samo u električki stacionarnom stanju!

Statički hazard

- **Statički 0-hazard**: generiranje impulsa 1 na izlazu logičkog sklopa koji je, statički, prije i poslije promjene na ulazu/ulazima bio u 0



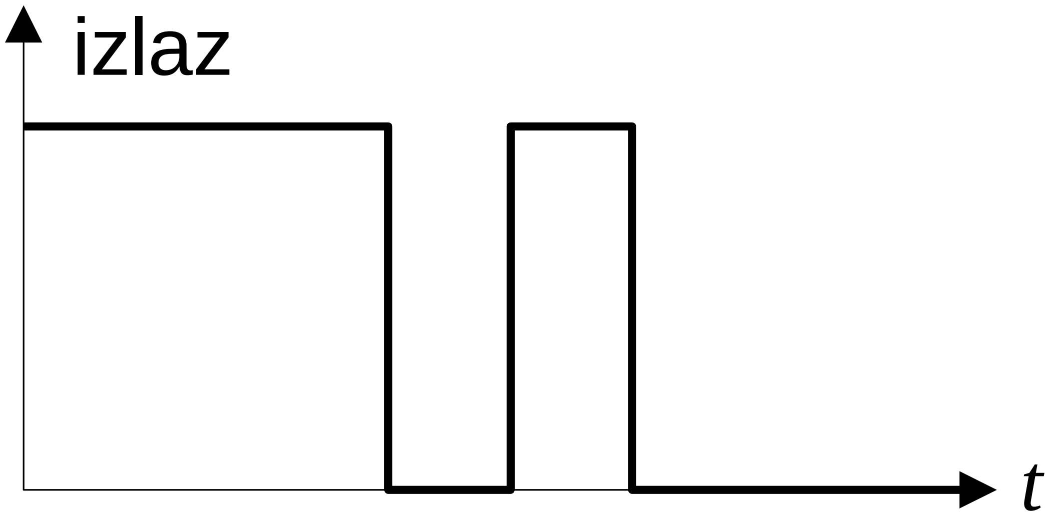
- **Statički 1-hazard**: generiranje impulsa 0 na izlazu logičkog sklopa koji je, statički, prije i poslije promjene na ulazima bio u 1



Primjer 0-hazarda

Dinamički hazard

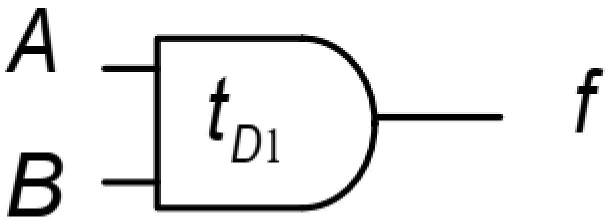
Pojava jednog ili više neispravnih impulsa prilikom promjene stanja na izlazu

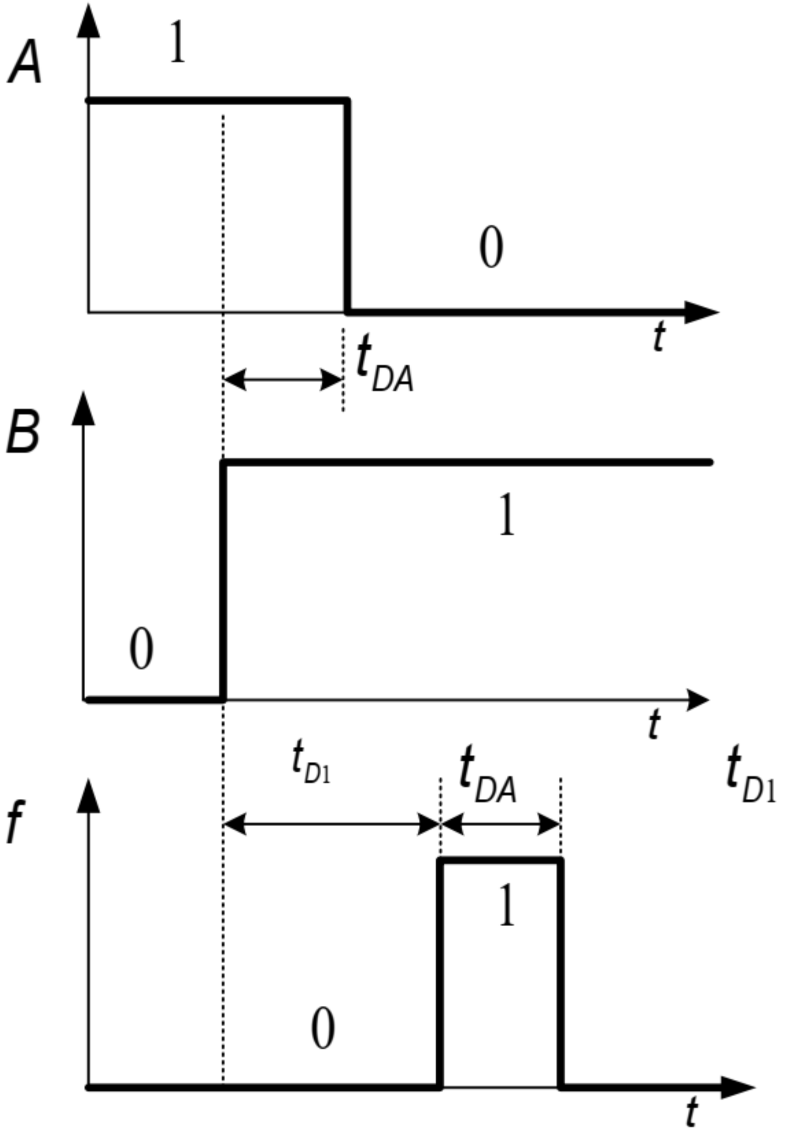


Funkcijski hazard

Inherentno svojstvo logičke funkcije

- Npr. zbog kašnjenja jedne od ulaznih varijabli kod I sklopa pri prijelazu 01 → 10 i obratno, obje varijable mogu kratkotrajno biti jednake 1





Booleova algebra

Primjeri zadataka s prethodnih ispita*

Ishod učenja 3 – 9 bodova - 25 min

1. **[I3_M, 3 boda]** Napisati drugu stranu aksioma i teorema Booleove algebre (svaki točan odgovor 0,5 bodova)

   $\boldsymbol{B+1=}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\overline{B}*B=}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\overline{A}*(B+C)=}$

   $\boldsymbol{\overline{A}+\overline{A}B=}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\overline{A+B}=}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\overline{A+\overline{B}+C}=}$

2. **[I3_M, 3 boda]** Iz zadane tablice stanja napisati kanonski oblik funkcije pomoću minterma (1 bod) te je minimizirati pravilima Booleove algebre (2 boda)

A	B	C	Y
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**0**
1	1	1	**1**

3. **[I3_Ž, 3 boda]** Pomoću pravila Booleove algebre pojednostavniti logičku funkciju $\boldsymbol{f=\left(\overline{AC}+C\right)+\overline{BC}}$ (1 bod). Napisati tablicu stanja(1 bod), te kanonski oblik funkcije koristeći sumu minterma (1 bod).

* Primjer ispita je ilustrativan. Vrste zadataka na budućim brzim testovima i ispitima mogu biti drugačije.

Primjeri zadataka s prethodnih ispita*

Ishod učenja 3 – 9 bodova - 25 min

1. **[I3_M, 3 boda]** Napisati drugu stranu aksioma i teorema Booleove algebre (svaki točan odgovor 0,5 bodova).

$$A + 1 = \qquad \bar{A} * A = \qquad \bar{A}(B + C) =$$

$$\bar{A} + AB = \qquad \overline{AB} = \qquad \overline{A + \bar{B} + C} =$$

2. **[I3_M, 3 boda]** Napisati tablicu stanja funkcije $f = A\bar{B} + \bar{A}C + B\bar{C}$ (0,5 bodova), kanonski oblik funkcije pomoću minterma (1 bod), te je minimizirati pravilima Booleove algebre (1,5 boda).

3. **[I3_Ž, 3 boda]** Pomoću pravila Booleove algebre pojednostavniti logičku funkciju $f = \left(\bar{A} + BC\right) + \overline{AC}$ (1 bod). Napisati tablicu stanja(1 bod), te kanonski oblik funkcije koristeći sumu minterma (1 bod).

* Primjer ispita je ilustrativan. Vrste zadataka na budućim brzim testovima i ispitima mogu biti drugačije.

LITERATURA:

- Uroš Peruško: Digitalni sustavi
  - Str. 89 - 125