MATEMATIČKA ANALIZA

Derivacije

Derivacija

Pierre de Fermat (1601 – 1665)
Francuski matematičar, pravnik, pjesnik…

Početkom 17. stoljeća razvio metode određivanja ekstrema i tangenti krivulja koje su blisko vezane uz teoriju koju danas nazivamo diferencijalnim računom.

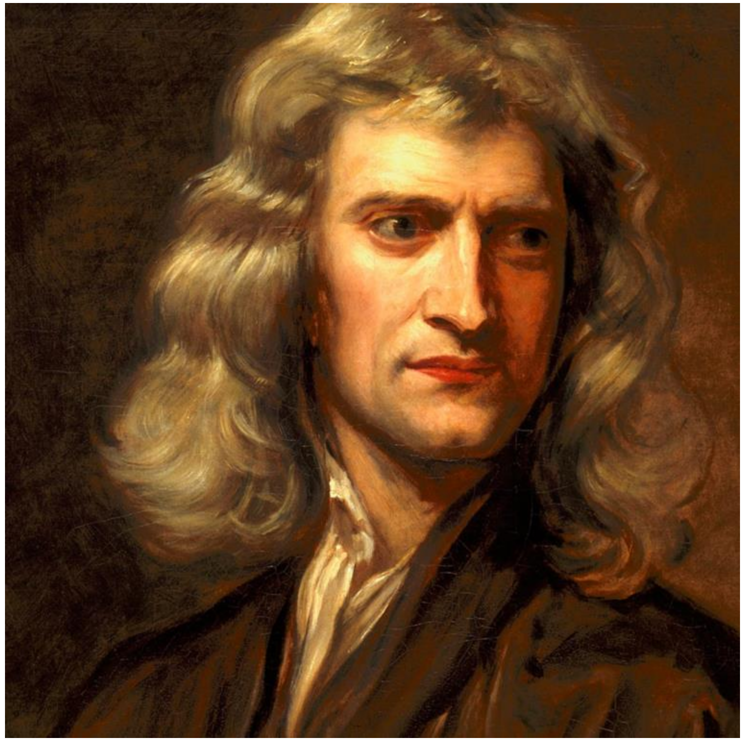
Njegov rad na tangentama poslužio je i kao neposredna inspiracija Isaacu Newtonu.

Derivacija

Za razvoj diferencijalnog računa danas smatramo zaslužnima dva velika znanstvenika:

Isaac Newton (1642 – 1727)

Engleski fizičar, matematičar, astronom …



Derivacija

Za razvoj diferencijalnog računa danas smatramo zaslužnima dva velika znanstvenika:

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

Njemački matematičar, filozof, diplomat…

Isaac Newton

Newton je kao fizičar proučavao gibanje tijela.

Tri Newtonova zakona:

- Zakon inercije (gibanje je jednoliko ako nema vanjske sile)
- Temeljni zakon gibanja ($F = m \cdot a$)
- Zakon akcije i reakcije

Drugi zakon se temelji na proučavanju kretanja tijela, njegove akceleracije, odnosno brzine.

Isaac Newton

Osnovno pitanje: **Što je brzina?**

$$brzina = \frac{put}{vrijeme} \qquad v = \frac{s}{t}$$

To je prosječna brzina, budući jedino možemo mjeriti prijeđeni put u nekom mjerljivom vremenskom periodu.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Isaac Newton

Brzina u nekom malom vremenskom periodu, Δt:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Brzinu u trenutku dobijemo prelaskom na limes, $\Delta t \to 0$:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Gottfried Wilhelm Leibniz

Problem tangente: „Kako za funkciju $f(x)$ odrediti jednadžbu tangente u točki $T(x_0, f(x_0))?$"

Ideja:

- provući sekantu kroz dvije točke na krivulji

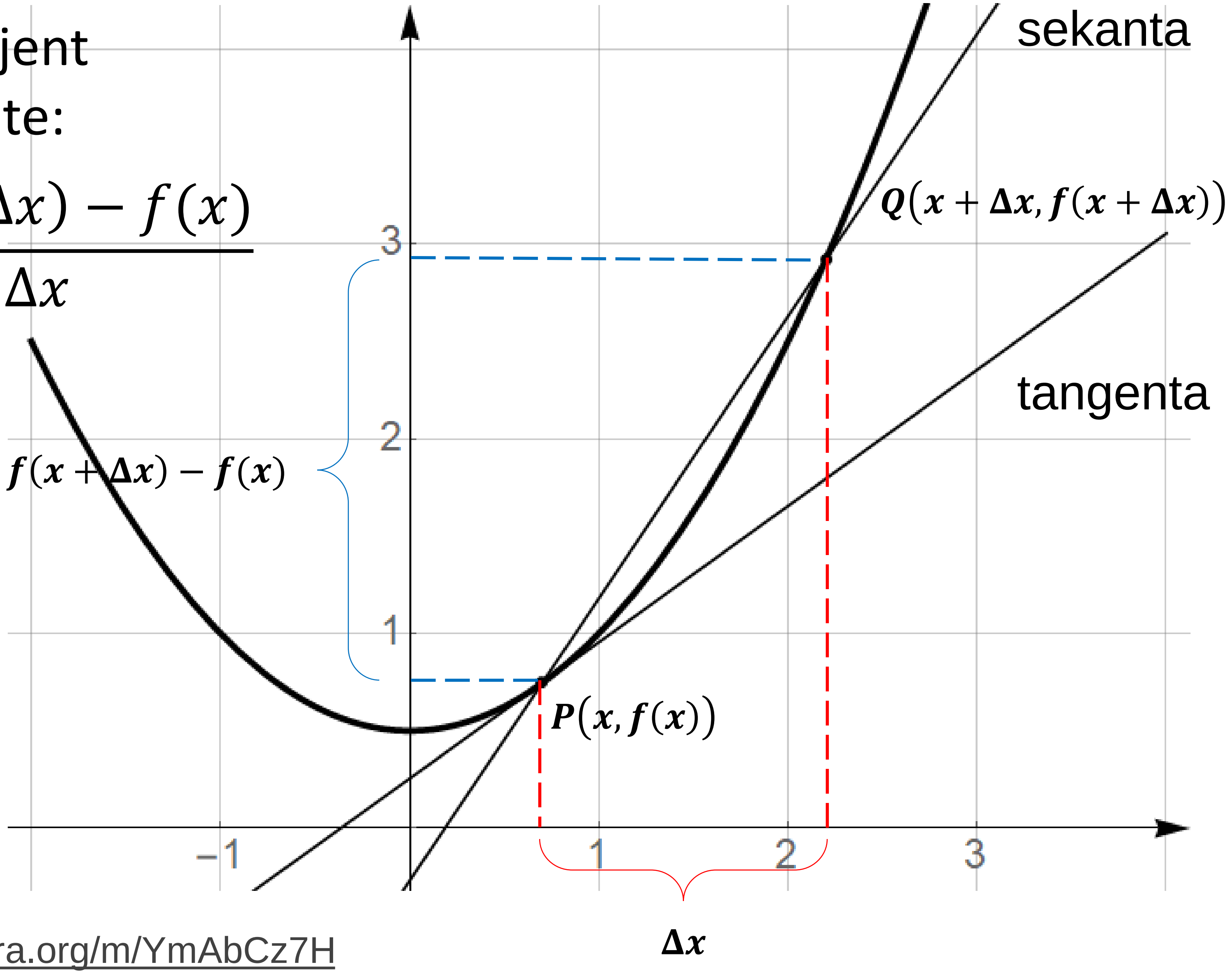
  $P\big(x, f(x)\big)$ i $Q\big(x + \Delta x, f(x + \Delta x)\big)$

- približavati te dvije točke dok ne postanu jedna, $Q \to P$

- tada sekanta postaje tangenta

Nagib (koeficijent smjera) sekante:

$$k_s = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



https://www.geogebra.org/m/YmAbCz7H

Gottfried Wilhelm Leibniz

Nagib (koeficijent smjera) sekante određen je formulom za jednadžbu pravca kroz dvije točke:

$$k_s = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Kada točku Q približimo točki P, tj. za $\Delta x \to 0$, dobivamo jednadžbu za koeficijent smjera tangente:

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivacija

Vidimo kako se u analizi problema brzine i problema tangente pojavljuje isti limes.

Vrijednost tog limesa (ako postoji) nazivamo derivacijom funkcije $f(x)$ u točki x_0, koju obilježavamo s $f'(x_0)$:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},}$$

pri čemu funkcija $f(x)$ mora biti definirana na nekoj (otvorenoj) okolini točke $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Derivacija

Za derivaciju se kroz povijest (ali i danas) koristi nekoliko različitih oznaka:

1. $f'(x_0)$ - Lagrangeov (Newtonov) zapis
2. $\frac{df}{dx}(x_0)$ - Leibnitzov zapis
3. $D\,f(x_0)$ - Cauchyjev zapis

https://www.youtube.com/watch?v=axZTv5YJssA

Računanje derivacije po definiciji

1. Pomoću definicije derivirajte funkciju $f(x) = 3x$.

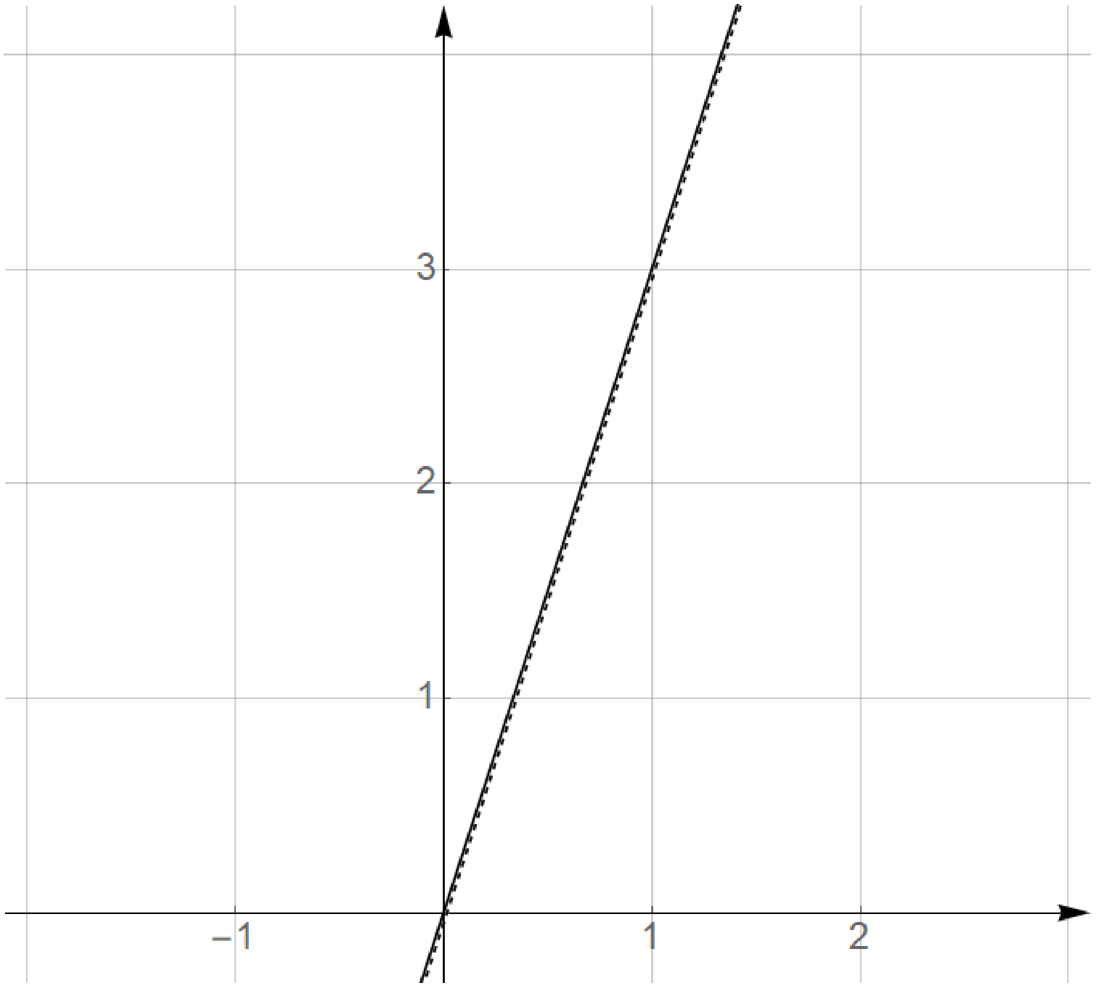
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) - 3x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x - 3x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

Računanje derivacije po definiciji

Dakle, tangenta na pravac $y = 3x$, je pravac s nagibom $k_t = 3$.



Svaki pravac je sam svoja tangenta, odnosno za svaki pravac $f(x) = ax + b$ vrijedi $f'(x) = a$.

Računanje derivacije po definiciji

2. Pomoću definicije derivirajte funkciju $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\,x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Računanje derivacije po definiciji

3. Pomoću definicije derivirajte funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

Računanje derivacije po definiciji

4. Pomoću definicije derivirajte funkciju $f(x) = \sqrt{x}$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivacija opće potencije

Derivacija funkcije $f(x) = x^n$ dana je s

$$\boxed{f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Derivacija opće potencije

5. Odredite derivaciju funkcije $f(x)$:

a) $f(x) = x^5$ $\qquad f'(x) = 5x^4$

b) $f(x) = x$ $\qquad f'(x) = 1$

c) $f(x) = 3$ $\qquad f'(x) = 0$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\qquad f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Derivacija opće potencije

5. Odredite derivaciju funkcije $f(x)$:

e) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{6}}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

Hvala ☺