5. Neprekinute slučajne varijable

5.1. Slučajne varijable i razdiobe

Slučajne varijable i funkcija razdiobe

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbf{R}$ nazivamo **slučajna varijabla** ako je za svaki $x \in \mathbf{R}$ skup $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ događaj, dakle element algebre $\mathcal{F}$.
Skup $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ označavat ćemo kraće sa $\{X < x\}$.
Funkcija razdiobe slučajne varijable X je funkcija $F : \mathbf{R} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$F(x) = P\left(\{X < x\}\right).$$

Primjer 5.1.

Zadana je slučajna varijabla $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{2} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$. Odredi funkciju razdiobe varijable X i nacrtaj njezin graf.

Svojstva funkcije razdiobe

Teorem 5.1 *Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X. Ona posjeduje svojstva:*

1° $P\left(\{x_1 \leq X < x_2\}\right) = F(x_2) - F(x_1)$,

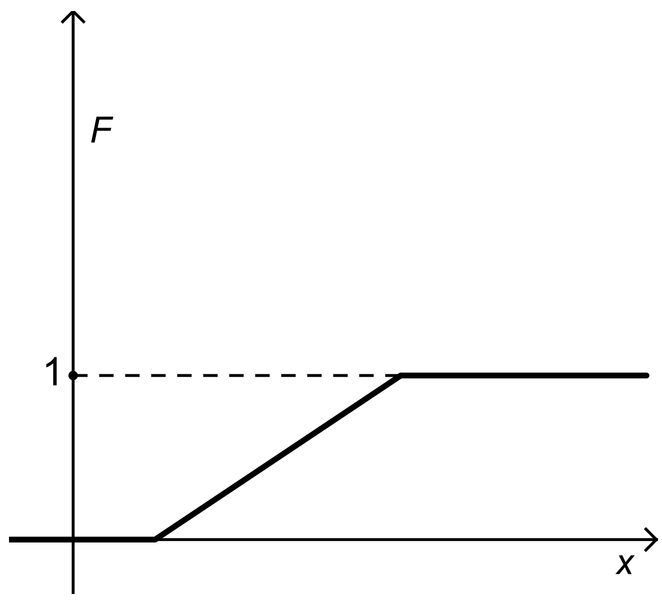
2° *F je neopadajuća:* $x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$,

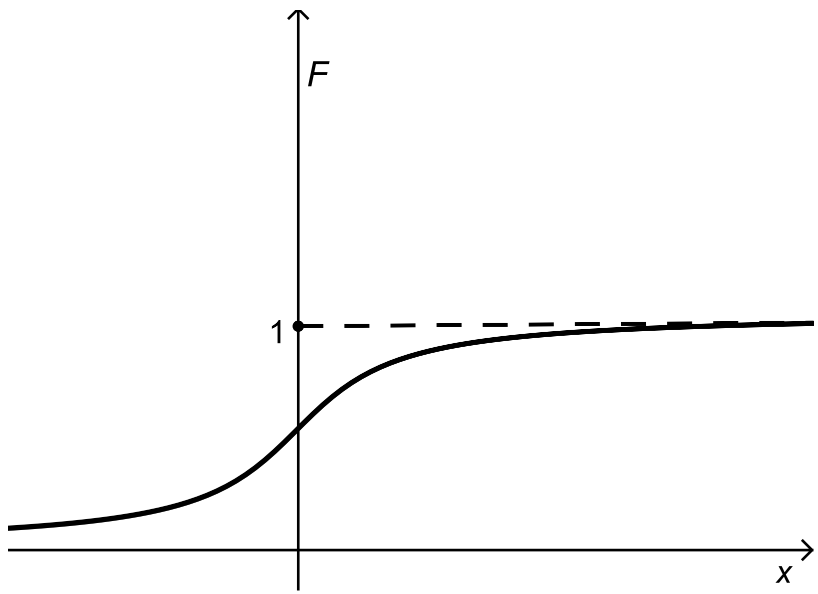
3° $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$,

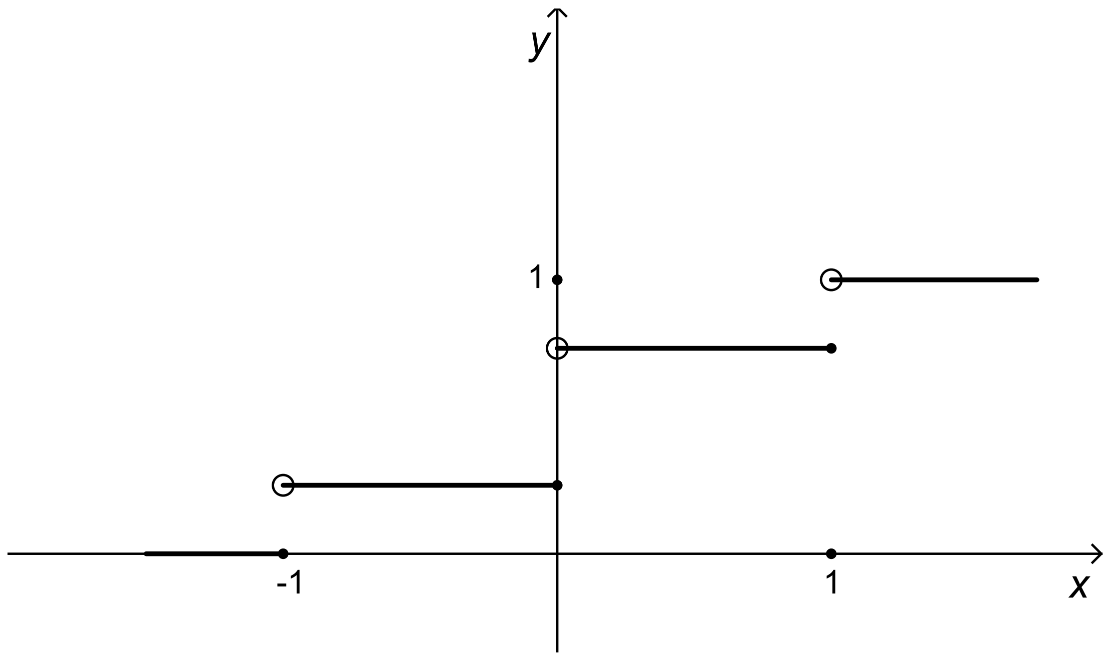
4° *F je neprekinuta slijeva:* $F(x-0) := \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} F(x-\varepsilon) = F(x)$,

$\forall x \in \mathbf{R}$

Grafovi nekih funkcija razdiobe




F
1
x


y
1
-1
1
x

Neprekinute slučajne varijable. Gustoća razdiobe

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **neprekinuta** (kontinuirana) ako postoji nenegativna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da vrijedi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Funkcija f naziva se **gustoća razdiobe vjerojatnosti** slučajne varijable X. Ona nije nužno neprekinuta, no u točkama neprekinutosti od f vrijedi

$$f(x) = F'(x).$$

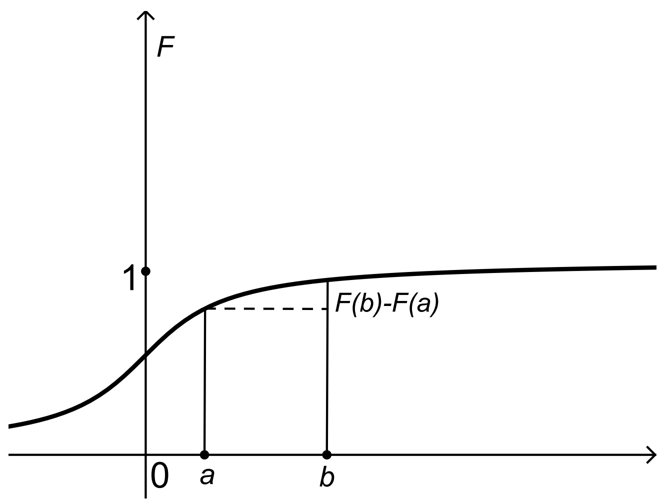
Funkcija razdiobe neprekinute slučajne varijable je i sama **neprekinuta**, jer je to funkcija gornje granice integrala. Dakle, $P(X = x) = F(x + 0) - F(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbf{R}$. Prema tome, događaji $\{x_1 < X < x_2\}$, $\{x_1 \leq X < x_2\}$, $\{x_1 < X \leq x_2\}$, $\{x_1 \leq X \leq x_2\}$ jednako vjerojatni. Prema Teoremu 5.1 njihova se vjerojatnost računa pomoću formule

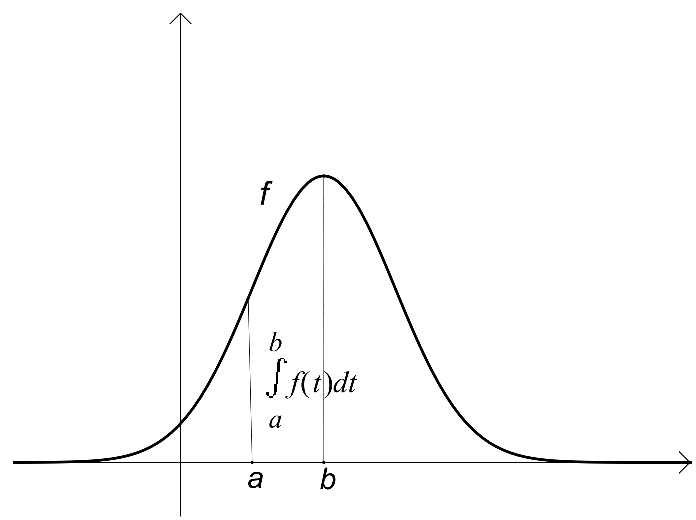
$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$$

Funkcija gustoće pozitivna je funkcija s integralom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Graf funkcije razdiobe i pripadne gustoće





Skraćeni zapis za funkciju razdiobe i gustoće

Umjesto zapisa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \le x, \end{cases}$$

kratko pišemo

$$F(x) = x, \quad 0 < x < 1,$$

jer je tada nužno $F(x) = 0$ za $x \le 0$ i $F(x) = 1$ za $x \ge 1$.

Također, ako gustoću razdiobe definiramo nekom formulom za $x \in [a, b]$, tada smatramo da je van tog intervala ona jednaka nuli. Na koncu, ako je funkcija F ili f definirana nekom formulom bez naznake područja definicije, onda će to redovito biti skup $\mathbf{R}$.

Jednolika razdioba

Razumno je pretpostaviti da je gustoća jednolike razdione konstantna

Jednolika razdioba, definicija, razdioba i gustoća

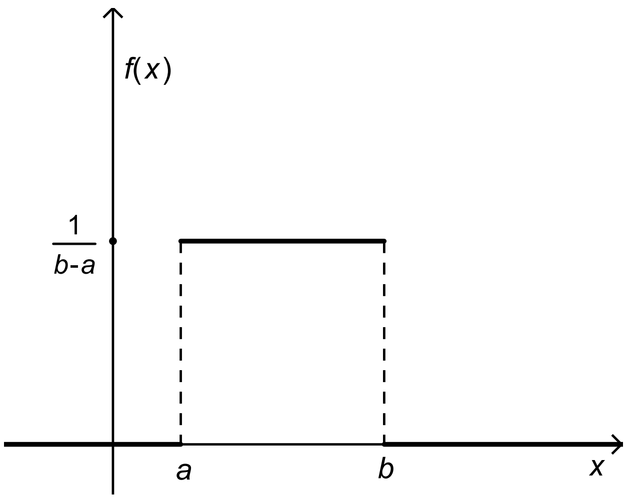
Za slučajnu varijablu X kažemo da je **jednoliko** (**uniformno**) distribuirana na intervalu $[a, b]$ ako je zadana funkcijom razdiobe odnosno funkcijom gustoće:

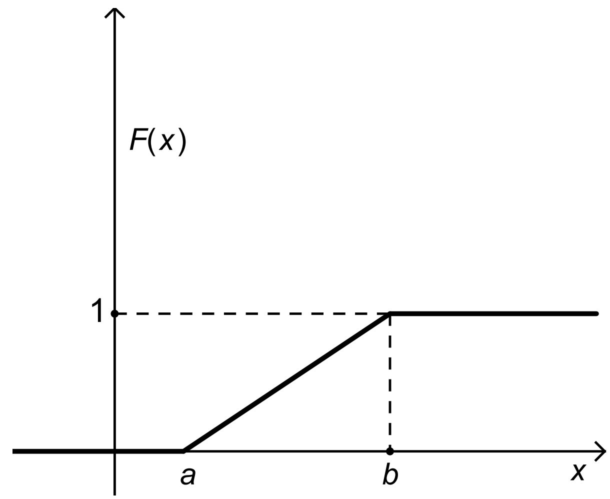
$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b,$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

Pišemo $X \sim \mathcal{U}(a, b)$.

Graf funkcije razdiobe i gustoće jednolike razdiobe





Primjer 5.2

Slučajno odabiremo dva broja unutar intervala $[0,1]$. Definirajmo slučajnu varijablu Z kao aritmetičku sredinu odabranih brojeva. Odredite zakon razdiobe i funkciju gustoće slučajne varijable Z.

Definicija nezavisnosti slučajnih varijabli

Kažemo da su slučajne varijable X i Y **nezavisne**, ukoliko za sve intervale A, B iz skupa $\mathbf{R}$ vrijedi

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Očekivanje i disperzija

Neka je X neprekinuta slučajna varijabla s gustoćom f. Njezino očekivanje definira se na način

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Ako ovaj nepravi integral ne konvergira, očekivanje ne postoji.

Označimo $\overline{x} = E(X)$. Tada je

$$D(X) = E\left[(X - \overline{x})^2\right] = E(X^2) - \overline{x}^2.$$

Prema tome,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \overline{x}^2.$$

Svojstva očekivanja i disperzije

Za sve slučajne varijable X, Y i realne brojeve α, β vrijedi svojstvo linearnosti očekivanja:

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

Za disperziju vrijedi

$$D(\alpha X) = \alpha^2 D(X).$$

Ako su X i Y nezavisne, onda vrijede relacije

$$E(XY) = E(X)E(Y) \qquad \text{i} \qquad D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Primjer 5.3.

Izračunajte očekivanje i disperziju jednolike razdiobe na intervalu $[0, 1]$.

Primjer 5.4.

Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1 - Cx & , 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & , \text{inače} \end{cases},$$

gdje je C neka realna konstanta.

(a) Odredite konstantu C tako da f bude gustoća razdiobe slučajne varijable X.

(b) Odredite funkciju razdiobe $F(x)$.

(c) Izračunajte vjerojatnost događaja $\{1 < X < 2\}$.

(d) Izračunajte očekivanje $E(X)$.

Primjer 5.5.

Izračunajte očekivanje i disperziju slučajne varijable iz Primjera 5.2.

Primjer 5.6.

Biramo na sreću točku unutar kruga polumjera 1. Neka je vrijednost slučajne varijable X udaljenost te točke od ruba kruga. Odredi razdiobu i očekivanje slučajne varijable X.