

Matematička analiza

Ishod 1

Limes funkcije

Neka je a konačan realan broj ili $\pm\infty$. Ako postoji realan broj L , kojem se funkcija $y = f(x)$ približava kad je varijabla x blizu a , tada taj broj zovemo **limes** funkcije f u točki $x = a$, odnosno

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Jednostrani limesi

Ako se približavamo broju a s lijeve strane, tj. preko vrijednosti koje su manje od a , onda takav limes (ako postoji) nazivamo lijevim limesom funkcije f u točki $x = a$. Pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Ako se približavamo broju a s desne strane, tj. preko vrijednosti koje su veće od a , onda takav limes (ako postoji) nazivamo desnim limesom funkcije f u točki $x = a$. Pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Limes funkcije

Neodređeni oblici:

- Limese **racionalnih** izraza oblika:
 - $\frac{0}{0}$ određujemo skraćivanjem
 - $\frac{0}{\infty}$ određujemo dijeljenjem s najvećom potencijom u nazivniku
 - $\infty - \infty$ određujemo svođenjem na zajednički nazivnik
- Limese **iracionalnih** izraza oblika:
 - $\frac{0}{0}$ određujemo uvođenjem nove varijable ili racionalizacijom
 - $\frac{0}{\infty}$ određujemo dijeljenjem s najvećom potencijom u nazivniku
 - $\infty - \infty$ određujemo racionalizacijom
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Limes funkcije

1.1. Odredite slijedeće lijeve i desne limese:

a)
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x}{x - 3}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x + 1}{(x - 5)(x + 5)}$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{(x - 2)^2}$$

Limes funkcije

1.2. Izračunajte slijedeće limese:

a)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + x + 1}$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$$

Limes funkcije

1.3. Izračunajte slijedeće limese:

a)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^4 + 1}}{x^2 + 3}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}$$

d)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^3 - 2x} + x}{x^2 + x}$$

Limes funkcije

1.4. Izračunajte slijedeće limese:

a)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 1} \right)$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} \right)$$

Limes funkcije

1.5. Izračunajte slijedeće limese:

a)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{3x - 6}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

Tablične derivacije

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Pravila deriviranja

1. $(c)' = 0$

2. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

3. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Derivacije

2.1. Primjenom odgovarajućeg pravila derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$

b) $f(x) = (x^{11} - x)(x^6 + 6)$

c) $f(x) = x^3 \cdot \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

Derivacije

2.2. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = \frac{1 - 3x}{2x + 1}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - x^2}$

Derivacije

2.3. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = (x^2 + 3x - 4) \cos x$

b) $f(x) = \frac{x - \sin x}{5 + \cos x}$

c) $f(x) = \cos x \operatorname{ctg} x$

Derivacije

2.4. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = x^2 \log_2 x$

c) $f(x) = e^x - 3 \cdot 2^x + 1$

b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

d) $f(x) = \frac{10^x + 6^x}{3^x}$

Derivacije

2.5. Derivirajte slijedeće funkcije:

$$\text{a) } f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x\sqrt{x}} + \sqrt[7]{2}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{\cos \pi}{1 + \operatorname{tg} x} + 2^x$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\sin x}{x^3} - (x^3 + 2) \log x$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x \ln x} + e^3$$

Derivacije

2.6. Riješite u skupu realnih brojeva jednadžbu: $f'(x) = g'(x)$, gdje je $f(x) = \frac{1}{2}x^4$, a $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$.

2.7. Riješite u nejednadžbu: $f'(x) > g'(x)$, gdje su:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}, \quad g(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}.$$

Tablične derivacije

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Derivacija složene funkcije

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

3.1. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = (x^2 + 3)^2$

b) $f(x) = (1 - x + 5x^3)^5$

c) $f(x) = (x^2 + 5x - 1)^7$

Derivacija složene funkcije

3.2. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = \sqrt[3]{1 + 2x}$

d) $f(x) = \cos^6 x$

b) $f(x) = \sqrt[4]{(x + 3)^3}$

e) $f(x) = \cos x^6$

c) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

f) $f(x) = \sin^3 x^2$

Derivacija složene funkcije

3.3. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = \sin(3x + \pi)\sqrt{1 - x^2}$

b) $f(x) = \log_3(x^2 + 5)$

c) $f(x) = \sin(\ln(x + 2))$

d) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)$

Derivacija složene funkcije

3.4. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = 2^{x^3+4}$

c) $f(x) = e^{\sqrt{xe^x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{5x^2}$

d) $f(x) = 2^{\operatorname{tg}^2 x}$

Derivacija složene funkcije

3.5. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x$

b) $f(x) = \log^2(2x + 1)$

c) $f(x) = \ln(\ln(x^2 + 4))$

Tablične derivacije

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Logaritamsko deriviranje

4.1. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = (\ln x)^x$

c) $f(x) = e^{\cos x} + x^{x+1}$

b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

d) $f(x) = \pi^2 + 2^x + x^2 + \sqrt[x]{x}$

Logaritamsko deriviranje

4.2. Derivirajte slijedeće funkcije:

a) $f(x) = x \cdot (x^2 + 1)^{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt[x]{x+1}}{x^2+1}$

Derivacije višeg reda

4.3. Odredite prve dvije derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sin x - \operatorname{tg} x$

b) $f(x) = x \sin x$

c) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$

Derivacije višeg reda

4.4. Odredite sve derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

b) $f(x) = \ln x$

c) $f(x) = e^{2x}$

Hvala 😊