Multimedijsko računarstvo – Preddiplomski studij – Multimedijsko računarstvo
Primijenjeno računarstvo – Preddiplomski studij – Sistemsko inženjerstvo
Primijenjeno računarstvo – Preddiplomski studij – Programsko inženjerstvo

MATEMATIKA 1

Ogledni primjer

Ime i prezime:________________________________

Grupa:______________________________________

Ishod	I1	I2	I3	I4	UKUPNO
Vrijeme pisanja	45 minuta	45 minuta	45 minuta	45 minuta	180 minuta
Bodovi	20	20	20	20	80

UPUTE:

- Na ispitu nije dozvoljeno korištenje kalkulatora
- Zaokružiti ishod učenja koji želite pisati
- Odgovore i postupak pišite na dodatni papir redom kojim su postavljeni zadaci, uz naznaku ishoda i zadatka na koji odgovarate
- Ispitna pitanja rješavate na papiru (papir + kemijska olovka). Sliku riješenog zadatka/postupka slikate i putem QR koda unosite u ispit. Ispod svakog zadatka se potpišite. Ukoliko nema potpisa ispod riješenog zadatka, isti se neće pregledati niti će biti bodovan.

Ishod učenja 1 – 20 bodova

1. **[I1, 2 boda]** Pomnožite i podijelite polinome $f(x)$ i $g(x)$:

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 2 \qquad g(x) = -x + 2$$

2. **[I1, 2 boda]** Skicirajte krivulje:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$

b) $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$

3. Nađite rješenja nejednadžbi:

   a) **[I1, 1 bod]** $(2x-1)^2 \geq 2x(2x+3)$

   b) **[I1, 2 boda]** $6x^2 + 3x < 2x + 1$

   c) **[I1, 2 boda]** $\frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} \leq 0$

4. **[I1, 4 boda]** Odredite domenu i nultočke sljedećih funkcija:

   a) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{4-2x}$

   b) $f(x) = \frac{3^x - 9}{x^2 + x + 1}$

5. **[I1, 4 boda]** Riješite sljedeće jednadžbe:

   a) $3^{x-1} \cdot 2^{x+1} = 1000$ (rješenje iskažite pomoću dekadskog logaritma)

   b) $3\ln\frac{2x-4}{3} = -6$

6. **[I1, 3 boda]** Omjer veličina unutarnjih kutova je 1 : 2 : 3, a najkraća stranica je duljine 4 cm. Odredite veličine unutarnjih kutova i duljine preostalih stranica.

.

Ishod učenja 2 – 20 bodova

1. **[I2, 2 boda]** Zadane su funkcije $f(x) = \ln(2x)$ i $g(x) = 2^{3x}$. Odredite $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$

2. **[I2, 3 boda]** Pronađite inverz zadane funkcije.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \, .$$

Provjerite inverz kompozicijom.

3. **[I2, 3 boda]** Za funkcije $f(x) = \frac{2}{x} + 1$ i $g(x) = x^2 + 1$ pronađite rješenja jednadžbe $(f \circ g)(x) = 2$.

4. **[I2, 3 boda]** Zadani su skupovi $A = \{1, \{2\}\}$ i $B = \{1, \{2, 3\}\}$.

   a) Koliko iznosi kardinalni broj skupa B?

   b) Odredite partitivni skup $\mathcal{P}(A)$.

   c) Odredite Kartezijev produkt $B \times A$.

5. **[I2, 2 boda]** Zadani skupovi $A = \langle -5, 2 \rangle$, $B = [0, 5]$, $C = \{-5, 0, 2, 5\}$. Odredite:

   a) $(A \cap B) \backslash C$

   b) $(A \cup C) \backslash B$

6. **[I2, 1 bod]** Odredite 4. član niza ako je $a_1 = -2,\ a_2 = 1,\ a_n = 2a_{n-1} - n \cdot a_{n-2}$.

7. **[I2, 3 boda]** Ako je za aritmetički niz zadano: $a_1 + a_3 + a_4 = 3$ i $a_3 - a_1 = 1$ odredite 11. član niza.

8. **[I2, 3 boda]** Odredite zbroj prvih 5 članova geometrijskog niza za kojeg vrijedi $a_1, q > 0$, $a_1 \cdot a_3 = 9$ i $a_3 + 2a_4 = 3$.

Ishod učenja 3 – 20 bodova

1. **[I3, 2 boda]** Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
   Riješite matričnu jednadžbu: $2\,A^T + \frac{1}{2}X = B \cdot C$.

2. **[I3, 3 boda]** Gaussovom metodom riješite sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & -3 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -4 \end{array}$$

3. **[I3, 3 boda]** Odredite inverz matrice A^{-1}, ukoliko postoji:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. **[I3, 3 boda]** Izračunajte vrijednost determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5. **[I3, 3 boda]** Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
   Riješite matričnu jednadžbu: $A \cdot X + B \cdot X = 2I$.

6. Zadane su tri točke u prostoru: $A(1,0,-2), B(2,-1,1), C(-2,2,0)$.

   a) **[I3, 1 bod]** Odredite vektore $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$.

   b) **[I3, 1 bod]** Izračunajte $|\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}|$.

   c) **[I3, 2 boda]** Izračunajte skalarni produkt $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

   d) **[I3, 2 boda]** Izračunajte vektorski produkt $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}$.

Ishod učenja 4 – 20 bodova

1. **[I4, 2 boda]** Zadane su točke u ravnini: $A(2,-1), B(-1,1)$.
   a) Odredite vektorsku jednadžbu pravca AB.
   b) Odredite kanonsku jednadžbu pravca AB.

2. **[I4, 2 boda]** Zapišite vektorsku jednadžbu kružnice u ravnini, polumjera $R = 3$, čije je središte u točki $T(1,-1)$.

3. **[I4, 3 boda]** Pravac zadan vektorskom jednadžbom $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3}\,t \\ -1+t \end{bmatrix}$ rotirajte za $30°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Skicirajte oba pravca u koordinatnoj ravnini.

4. **[I4, 2 boda]** Zapišite vektorsku jednadžbu krivulje $y = x^3$.
   Rastegnite tu krivulju za faktor $k = 2$ u smjeru x-osi.

5. **[I4, 2 boda]** Odredite vektorsku jednadžbu ravnine u prostoru koja prolazi točkama $A(1,-1,2), B(2,0,0), C(0,-2,1)$.

6. **[I4, 3 boda]** Odredite presjek ravnina u prostoru: $x-2y-z+3=0$ i $-x+y+2z-1=0$.
   Dobiveni pravac zapišite u kanonskom obliku.

7. **[I4, 3 boda]** Odredite presjek pravca $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1-t \\ -1-t \\ 2t \end{bmatrix}$ i ravnine $-x+2y-z+2=0$.

8. **[I4, 3 boda]** Odredite udaljenost između ravnina $x-2y-z+3=0$ i $x-2y-z-2=0$.

Kvadratna jednadžba:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Koordinate tjemena

$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Algebarski izrazi:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Potencije:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$(a^m)^n = a^{n \cdot m}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Logaritamska i eksponencijalna funkcija:

$\log_c(x \cdot y) = \log_c x + \log_c y$

$\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$

$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

$\log_a a^x = x$

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a 1 = 0\,, (a > 0, a \neq 1)$

$\log_a a = 1\ (a > 0, a \neq 1)$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$

$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad b = a^c$

Aritmetički niz:

$d = a_n - a_{n-1} = const.$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$

Geometrijski niz:

$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = const.$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Trigonometrija pravokutnog trokuta:

$\sin\alpha = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$

$\cos\alpha = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{nasuprotna kateta}}$

kut	sin	cos	tg	ctg
0°	0	1	0	∞
10°	0.17	0.98	0.18	5.67
20°	0.34	0.94	0.36	2.75
30°	0.50	0.87	0.58	1.73
40°	0.64	0.77	0.84	1.19
45°	0.71	0.71	1	1
50°	0.77	0.64	1.19	0.84
60°	0.87	0.50	1.73	0.58
70°	0.94	0.34	2.75	0.36
80°	0.98	0.17	5.67	0.18
90°	1	0	∞	0

kut	sin	cos	tg	ctg
0°	0	1	0	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	∞	0
180°	0	-1	0	∞
270°	-1	0	∞	0
360°	0	1	0	∞

Matrice

Laplace-ov razvoj determinante:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot detA_{ij} \qquad i,j = 1, \dots, n$$

Inverz:

- Cramerovo pravilo: $A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \left[A_{ij}\right]^T, \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij}$

- Gauss-Jordanova metoda: $(A|\mathrm{I}) \sim \cdots \sim (\mathrm{I}|A^{-1})$

Sustavi linearnih jednadžbi: $Ax = b$

- Cramerovo pravilo: $x_i = \frac{D_i}{detA}$, $i = 1, \dots, n$
- Gauss-Jordanova metoda: elementarne transformacije nad recima matrice $(A|\mathrm{b})$

Vektori

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}$
- Za vektor $\overrightarrow{AB} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$ vrijedi $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$
- Za $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$ vrijedi
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\varphi$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
- $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sin\varphi$

Geometrija ravnine:

Pravac: vektorska jednadžba: $\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}$,
gdje je $\overrightarrow{r_A}$ radij vektor točke na pravcu, a $\vec{s}$ vektor smjera.

Kružnica sa središtem u ishodištu, polumjera R: $\vec{r} = \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{bmatrix}, \ t \in [0, 2\pi\rangle$.

Graf funkcije $y = f(x)$: $\vec{r} = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}, \ t \in D_f$.

Translacija za vektor $\vec{a}$: $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$

Osna simetrija:

- simetrija obzirom na x-os: $\vec{r}' = S_x \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- simetrija obzirom na y-os: $\vec{r}' = S_y \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Rotacija za kut α (smjer suprotan kretanju kazaljke na satu):

$$\vec{r}' = R \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rastezanje i sažimanje za faktor k:

- u smjeru x-osi: $\vec{r}' = M_x \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- u smjeru y-osi: $\vec{r}' = M_y \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Geometrija prostora:

Pravac:
Vektorska jednadžba: $\vec{r} = \vec{r_A} + t \cdot \vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}$,
Kanonska jednadžba pravca: $\frac{x-x_A}{s_x} = \frac{y-y_A}{s_y} = \frac{z-z_A}{s_z}$
gdje je A točka na pravcu, a $\vec{s}$ vektor smjera tog pravca.

Ravnina:
Vektorska jednadžba: $\vec{r} = \vec{r_A} + u \cdot \vec{s_1} + v \cdot \vec{s_2}, \quad u, v \in \mathbb{R}$
gdje je $\vec{r_A}$ radij vektor točke na ravnini, a $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ vektori smjera te ravnine.

Normala ravnine $\vec{n}$ je vektor okomit na tu ravninu: $\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$, $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$.

Opća jednadžba ravnine koja prolazi točkom $T(x_0, y_0, z_0)$ i ima normalu $\vec{n}$:
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Udaljenost točke $T(x_0, y_0, z_0)$ do ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$:
$$d = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **okomiti** ako im je skalarni produkt jednak nula: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **paralelni** ako su proporcionalni: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.