Vektori

12.1

a)

$A(\overset{x_1}{-2}, \overset{y_1}{3})$ $\overrightarrow{AB}$ - x traži

$B(\overset{x_2}{3}, \overset{y_2}{4})$

$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

$\overrightarrow{AB} = (3-(-2))\vec{i} + (4-3)\vec{j}$

$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + \vec{j}$

b)

$A(-2, 3, 1)$ $\overrightarrow{AB} = (3-(-2))\vec{i} + (4-3)\vec{j} + (2-1)\vec{k}$

$B(3, 4 2)$ $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

12. 2

$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

a)

$\overrightarrow{AB} = (0 - x_1)\vec{i} + (0 - y_1)\vec{j} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$

~~A~~$B(0,0)$

$0 - x^1 = -3$

$0 - y^1 = 5$

$y^1 = -5$

~~y~~ $x_1 = 3$

b)

$B(4; -6)$ ~~BM~~

$(4 - x_1)\vec{i} + (-6 - y_1)\vec{j} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$

Modul: $= \sqrt{(-3)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{34}$

$4 - x_1 = -3$ $-6 - y_1 = 5$

$x_1 = 7$

~~4,7~~

$y_1 = -11$

12.3. c)

$A(x, y, z)$

$B(-3, 5, 0)$

$\vec{AB} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

$\text{modul} = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 2^2}$

$= \sqrt{38}$

$-3 - x = -3 \quad = 0$

$5 - y = 5 \quad = 0$

$0 - z = 2 \quad = -2$

12.4.

$A(2, y, 3)$

$B(-1, 2, 0)$

$|\vec{AB}| = 6$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1-2)^2 + (2 - y_1)^2 + (0-3)^2}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (2-y)^2 + (-3)^2}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{9 + 4 - 4y + y^2 + 9} = 6$

$\sqrt{22 - 4y + y^2} = 6 \; /^2$

$22 - 4y + y^2 = 36$

$y^2 - 4y - 14 = 0$

$y_{1,2} = \ldots$

12.9.12.6 Skalarni umnožak - jer je lakši

a)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

$\vec{a} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

$-3 \cdot 3 - 4 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} \cdot \cos\varphi$

$-9 + 16 + 4 = \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot \cos\varphi$

$11 = 29 \cdot \cos\varphi \;/ : 29$

$\cos\varphi = \frac{11}{29}$

$\varphi = \cos^{-1}(\varphi)$

b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\varphi = \ldots$

$-2 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 3^2} \cdot \cos\varphi$

$4 + 25 - 9 = \sqrt{38} \cdot \sqrt{38} \cdot \cos\varphi$

$20 = 38 \cdot \cos\varphi \;/ : 38$

$\cos\varphi = \frac{20}{38}$

$\varphi = \ldots$

7. a)

Skalarni umnožak za okomite vektore

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ jer je $\cos\varphi = 0$

a) $\vec{a} = t\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

$t \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 = 0$

$t - 12 + 4 = 0$

$t = 8$

b) $6 \cdot 4 + (-t) \cdot (t+7) + (t+1) \cdot (-2)$

24

$24 - t^2 - 7t - 2t - 2 = 0$

$-t^2 - 9t + 22 = 0 \qquad t_{1,2} = \ldots$

8.

$\vec{a} = (1, 1, 0) \quad \vec{b} = (-1, 2, 1)$

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}\right|$

$= 1\vec{i} + 2\vec{k} - (-1\vec{k}) - 1\vec{j}$

$= \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$\left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right|$

$= \vec{j} - \vec{k} - (-\vec{i}) - 2\vec{k} = \vec{j} + \vec{i} - 3\vec{k}$

9. VAŽNO: Površina paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $|\vec{a} \times \vec{b}|$

pov. paralelograma $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$ kvadratna jedinica

$= \frac{\sqrt{11}}{2}$ – trokut

pov. trokuta $= \frac{\text{pov. paralelograma}}{2} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$

[illegible]
2. 1. 2024

Laplaceov rozvoj

11.1 3 do 4 hodin Laplace

d) 2. ročník

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-2) & /\cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{bmatrix} -10 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -10 & 3 \\ 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{matrix}$$

$$= 40 - 45 - 3 - (-6 - 30 - 30)$$

$$= \underline{-2}$$

$$= 1 \cdot (-2) = \underline{-2}$$

11.2

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-2) & /\cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{matrix}$$

$$1 \cdot (-20) = -20$$

$$= (4 - 18 - 3) - (12 - 3 - 6)$$

$$= \underline{-20}$$

$$\det(A) = \underline{-20}$$

ješ jeden ročník

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$/\cdot 1$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$-1 \cdot 20 = \underline{-20}$$

$$(6 + 4 + 12) - (2 + 4 - 9)$$

$$= \underline{20}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{3} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad 5 \cdot 16 = 80$$

$$3 + 0 + 6 - (0 + 2 - 9)$$

$$9 + 7 = \underline{16}$$

d)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & \textcircled{1} & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 \cdot 2 \;+ \quad 1 \cdot (-1) \;+ \quad \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \ldots$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{vmatrix} \ldots$$

Rozdle zadoćo - 23

1.

$$X + 2B^T = A \cdot A - 3I$$

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$X + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}$$

2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right] /:(-1) \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right| /\cdot(-2) \;/\cdot(-3) \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 2 & 18 \end{array}\right| /:3$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 6 & 2 & 18 \end{array}\right| /\cdot 1 \;/\cdot(-6) \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right|$$

$$x - \frac{2}{3}z = -\frac{5}{3}$$

$$y - \frac{1}{3}z = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}z - \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}z + \frac{7}{3}$$

Invers matrice

11.3

a)

$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{1-(-6)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

b)

$A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{12+12} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{0}$ fara inversa!!!

c)

$A = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{0-3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

11.4

2 de 3 lucru

a) $AXB = C$

$A \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = C \cdot B^{-1}$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$C = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

$A \cdot X = C \cdot B^{-1}$

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} C \cdot B^{-1}$

$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -13 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$X = \frac{1}{50} \cdot \begin{vmatrix} 15 & -13 \\ 45 & 11 \end{vmatrix}$

b)

$AX - 2X = B$

$(A - 2I) \cdot X = B \,/\cdot (A-2I)^{-1}$ la stânga

∀ x numai ierar la dreapta

$\underbrace{(A-2I)^{-1} \cdot (A-2I)}_{I} \cdot X = (A-2I)^{-1} \cdot B$

$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$

$X = (A-2I)^{-1} \cdot B$

$X = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{10}$

$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$