OSNOVE DIGITALNE ELEKTRONIKE

Binarna aritmetika

Zdravko Kunić
zdravko.kunic@racunarstvo.hr

1+1=10

10+1=11

11+1=100

Got it? ☺

Binarna aritmetika

Ishod 1	Definirati brojevne sustave i opće principe digitalnog kodiranja Konvertirati brojeve između brojevnih sustava

Sadržaj predavanja

- Prikaz brojeva u registru
- Modulo operator
- Binarno zbrajanje
- Binarno oduzimanje

Registri

- Brojevi koji ulaze u aritmetičku operaciju nalaze se u sklopovima koji se nazivaju registri
- **Registar** je sklop koji pamti (registrira) niz znamenaka
  - za prikaz svake znamenke postoji posebna ćelija (*bistabil**)
- Veličina registra je stalne (fiksne) duljine
- Broj znamenki u digitalnim sustavima je ograničen veličinom registra, što utječe na algoritme kojima se obavljaju računske operacije

** Sklop s dva stabilna logička stanja*

Prikaz brojeva u registru

- Registar može prikazati brojeve u bilo kojem brojevnom sustavu s bazom B
- Radi ograničene veličine registra, za zapisivanja brojeva se često koristi znanstvena notacija s mantisom i eksponentom potencije
- Najveći cijeli broj koji se može prikazati s n brojnih mjesta je:

$$W = B^n - 1$$

$W = \mathbf{10^6} - \mathbf{1} = 99999$

dekadski sustav

9	9	9	9	9	9

$W = \mathbf{2^6} - \mathbf{1} = 63$

binarni sustav

1	1	1	1	1	1

Prisjetimo se terminologije ☺

Cjelobrojni ostatak dijeljenja

$$a \pmod{m} = b$$

a *djeljenik*

m *djelitelj*

b *cjelobrojni ostatak dijeljenja*

Prikaz brojeva u modulu

- Brojevi se prikazuju u modulu m (m - broj mogućih stanja registra)
- Radi ograničene veličine registra, kad u njega želimo zapisati broj a, u njemu će u stvarnosti biti zapisan broj b:

$$b = a(\text{mod } m)$$

b je ostatak dijeljenja a sa m

- Primjer:
  - Ako se u modulu 10 broju 4 pribroji 9, rezultat će biti 3:

$$4 + 9 = 13 \qquad 13 \text{ (mod } 10) = 3$$

Binarna aritmetika

- Aritmetičke operacije u binarnom sustavu
  - zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje…
- Obavljaju se na specifičan način, često različit od načina na koji se to radi na papiru
- **Binarno zbrajanje**: osnovna i najjednostavnija aritmetička operacija u digitanim sustavima (računalima)

Binarno zbrajanje

A:	0	0	1	1
B:	+0	+1	+0	+1
S:	**0**	**1**	**1**	**0**
C:	0	0	0	1

b \ a	0	1
0	0	1
1	1	10

A	B	Suma (S - *sum*)	Prijenos (C - *carry*)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Pravila binarnog zbrajanja

- Osnovni sklopovi za zbrajanje zbrajaju samo dvije znamenke
- Operacija modulo 2 sume: $\oplus$

$$
\begin{array}{rccc}
 & 1 & 0 & 1 \\
\oplus & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 \\
\oplus & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

1 0 0 → **S**: prva modulo 2 suma

0 1 0 → **C**: prijenos

1 1 0 → druga modulo 2 suma

Primjer zbrajanja dvaju binarnih brojeva

$$
\begin{array}{lrl}
 & 378 & \\
+ & 27 & \\
\hline
1. & 395 & :S \\
+ & 1 & :C \\
\hline
2. & 305 & :S \\
+ & 1 & :C \\
\hline
 & 405 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{lcccccccccl}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
\oplus & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S_1 \\
\oplus & & & & 1 & 1 & & 1 & & & C_1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & S_2 \\
\oplus & & & 1 & & & & & & & C_2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & S_3 \\
\oplus & & 1 & & & & & & & & C_4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Prisjetimo se terminologije ☺

Oduzimanje

$$M - S = D$$

M *umanjenik* ili *minuend*

S *umanjitelj* ili *suptrahend*

D *razlika* ili *diferencija*

Oduzimanje dviju binarnih znamenki

M:	0	1	1	0
S:	−0	−1	−0	−1
D:	**0**	**0**	**1**	**1**
Z:	0	0	0	1

b \ a	0	1
0	0	1
1	11	0

Minuend (M)	Suptrahend (S)	Diferencija (D)	Posudba (Z)
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

$D = M - S;$ $D = M \oplus S$

Podsjetnik na prikaz negativnih brojeva pomoću predznaka i 2. komplementa

- 2. komplement odredimo tako da pretvorimo 0→1 i 1→0 te dobivenom broju pribrojimo 1
- Primjeri:

```
 +72 = 01001000 →  10110111
                  +       1
             -72 = 10111000

+127 = 01111111 →  10000000
                  +       1
            -127 = 10000001
```

Raspon [-128,127]

```
-128 = 10000000
```

Vježba

Koji je dekadski broj zapisan u 8-bitnom registru ako znamo da se radi o zapisu cijelog broja pomoću dvojnog komplementa?

1	1	1	0	0	1	1	1

Rješenje

Koji je dekadski broj zapisan u 8-bitnom registru ako znamo da se radi o zapisu cijelog broja pomoću dvojnog komplementa?

1	1	1	0	0	1	1	1

$$11100111_2 = -1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$$

$$= -128 + 64 + 32 + 4 + 2 + 1$$

$$= \mathbf{-25}$$

Oduzimanje pomoću 2-komplementa

Korištenjem 2-komplementa, oduzimanje dvaju binarnih brojeva se svodi na zbrajanje.

Koraci su sljedeći:

- **Izjednačiti broj znamenaka umanjenika** i **umanjitelja**
  - Dodati potrebne nule na početak **umanjitelja** kako bi imao isti broj znamenaka kao umanjenik
- **Odrediti 2-komplement umanjitelja**
- **Umanjeniku pribrojiti 2-komplement umanjitelja**
  - u dobivenom zbroju izostaviti bit najveće težine

Oduzimanje pomoću 2-komplementa

$11_{10} - 9_{10} = ?$

$$11_{10} = 1011$$
$$9_{10} = 1001 \rightarrow 0111$$

$$\begin{array}{rcr} 1011 & = & 11_{10} \\ +\ 0111 & = & 9_{10} \\ \hline \cancel{1}\mathbf{0010} & = & \mathbf{2_{10}} \end{array}$$

Preljev se zanemaruje

$9_{10} - 11_{10} = ?$

$$9_{10} = 1001$$
$$11_{10} = 1011 \rightarrow 0101$$

$$\begin{array}{rcr} 1001 & = & 9_{10} \\ +\ 0101 & = & 11_{10} \\ \hline = \mathbf{1110} & = & \mathbf{-2_{10}} \end{array}$$

Nema preljeva,
rezultat je negativan

Primjer $25_{10} - 19_{10} = ?$

Oduzmite broj 19_{10} od broja 25_{10} u binarnom sustavu tehnikom drugog komplementa u 8-bitnom registru.

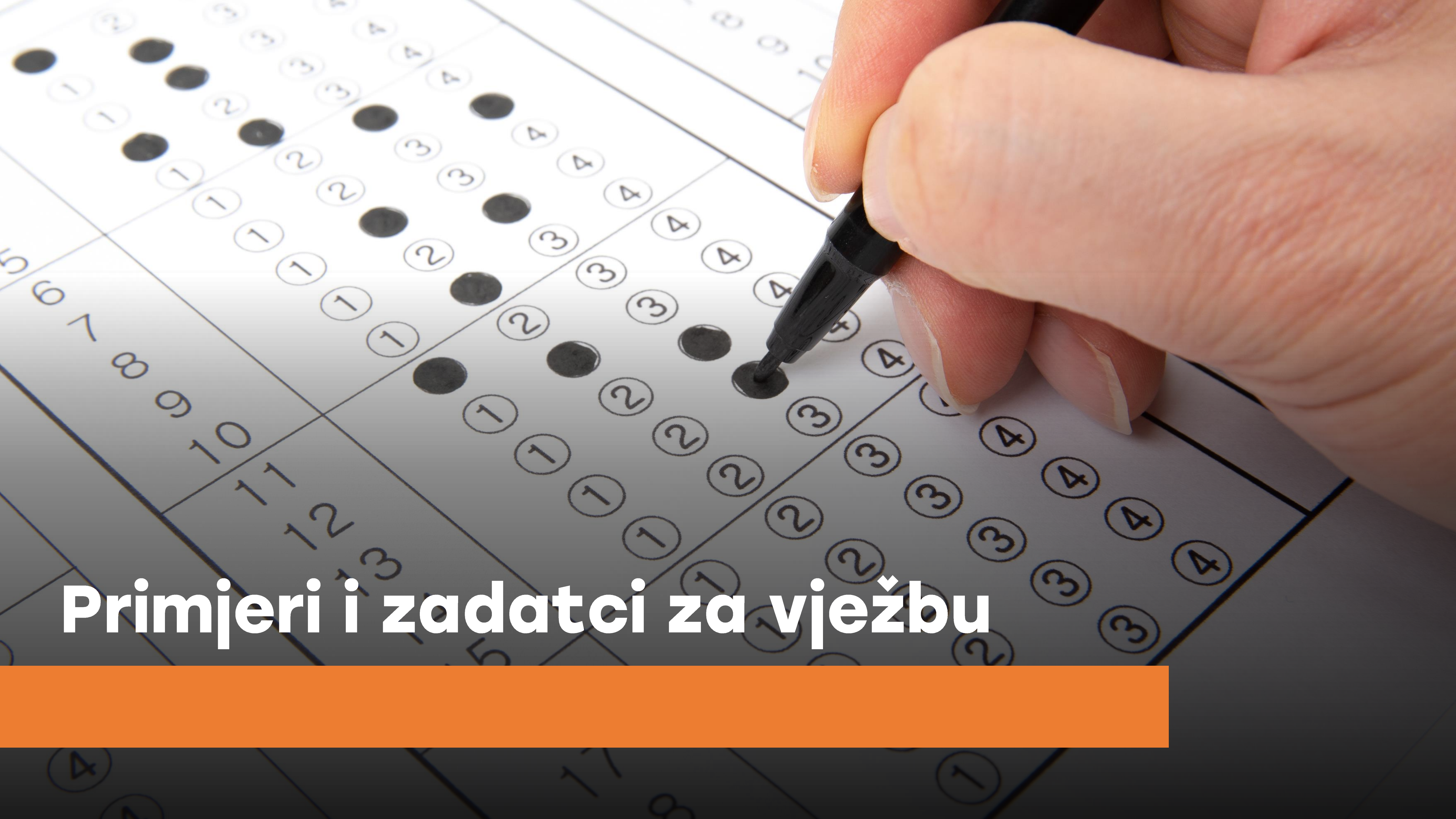
$$19_{10} = 00010011_2$$

$$
\begin{array}{rl}
11101100 & \textit{1-komplement} \\
+\qquad\quad 1 & \\
\hline
11101101 & \textit{2-komplement}
\end{array}
$$

$$25_{10} = 00011001_2$$

$$
\begin{array}{r}
+\ 11101101 \\
\hline
\cancel{1}00000110
\end{array}
= 6_{10}
$$

Binarna aritmetika



Primjeri i zadatci za vježbu

Zadatak

Prikažite dekadski broj -14

kao binarni broj u registru od 5 bitova,

korištenjem tehnike dvojnog komplementa

Rješenje

Binarni prikaz pozitivnog broja 14 (5 bita):

$+14_{10} = 01110_2$

$10001 \rightarrow$ 1-komplement

$\underline{+\quad\quad 1}$

$=$ **10010** $\rightarrow$ 2-komplement

Zadatci

- U binarnom brojevnom sustavu,
  uz primjenu tehnike dvojnog komplementa,
  koristeći registre veličine 5 bitova, obavite sljedeće operacije:
  - $4_{10} + 7_{10}$
  - $12_{10} – 5_{10}$
  - $7_{10} + 11_{10}$
  - $12_{10} – 16_{10}$
- Rezultate provjerite pretvorbom dobivenih binarnih rezultata u dekadske brojeve

Rješenja

$4_{10} + 7_{10}$

$$\begin{array}{rrcr} & 00100 & \rightarrow & 4 \\ + & 00111 & \rightarrow & 7 \\ \hline = & 01011 & \rightarrow & 11 \end{array}$$

$12_{10} - 5_{10}$

$$\begin{array}{rrcr} & 01100 & \rightarrow & 12 \\ + & 11011 & \rightarrow & -5 \\ \hline = & 00111 & \rightarrow & 7 \end{array}$$

$7_{10} + 11_{10}$

$$\begin{array}{rrcr} & 00111 & \rightarrow & 7 \\ + & 01011 & \rightarrow & 11 \\ \hline S & 01100 & & \\ +C & 00110 & & \\ \hline = & 10010 & \rightarrow & 18 \end{array}$$

Rješenje $12_{10} - 16_{10} = ?$

$16_{10} = 10000_2$

01111 – prvi komplement

$+ \quad 1$

10000 – drugi komplement

$12_{10} = 01100_2$

$+ \; 10000$

11100 – jedinica pokazuje da je rezultat negativan pa vraćamo broj iz 2-komplementa obrnutim postupkom

0011 – pretvorba u 1-komplement

$+ \quad 1$

$= 0100 = -4_{10}$

LITERATURA:

- Uroš Peruško: **Digitalni sustavi**
  - Str. 42 – 57
- Morris Mano, M., Kime, C. R. and Martin, T. (2016) **Logic and Computer Design Fundamentals**
  - Chapter 1-4 Arithmetic operations, pages 36 – 37
  - Chapter 3-10 Binary subtraction, pages 177-181