

MATEMATIČKA ANALIZA

Pravila deriviranja

Derivacija

Ponovimo definiciju derivacije funkcije:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

<https://www.geogebra.org/m/BDYnGhbt>

Derivacija trigonometrijskih funkcija

Odredimo po definiciji derivaciju funkcije $f(x) = \sin x$

koristeći pravila:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\cos 0 = 1$$

Derivacija trigonometrijskih funkcija

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

Derivacija trigonometrijskih funkcija

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$\cos 0 = 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

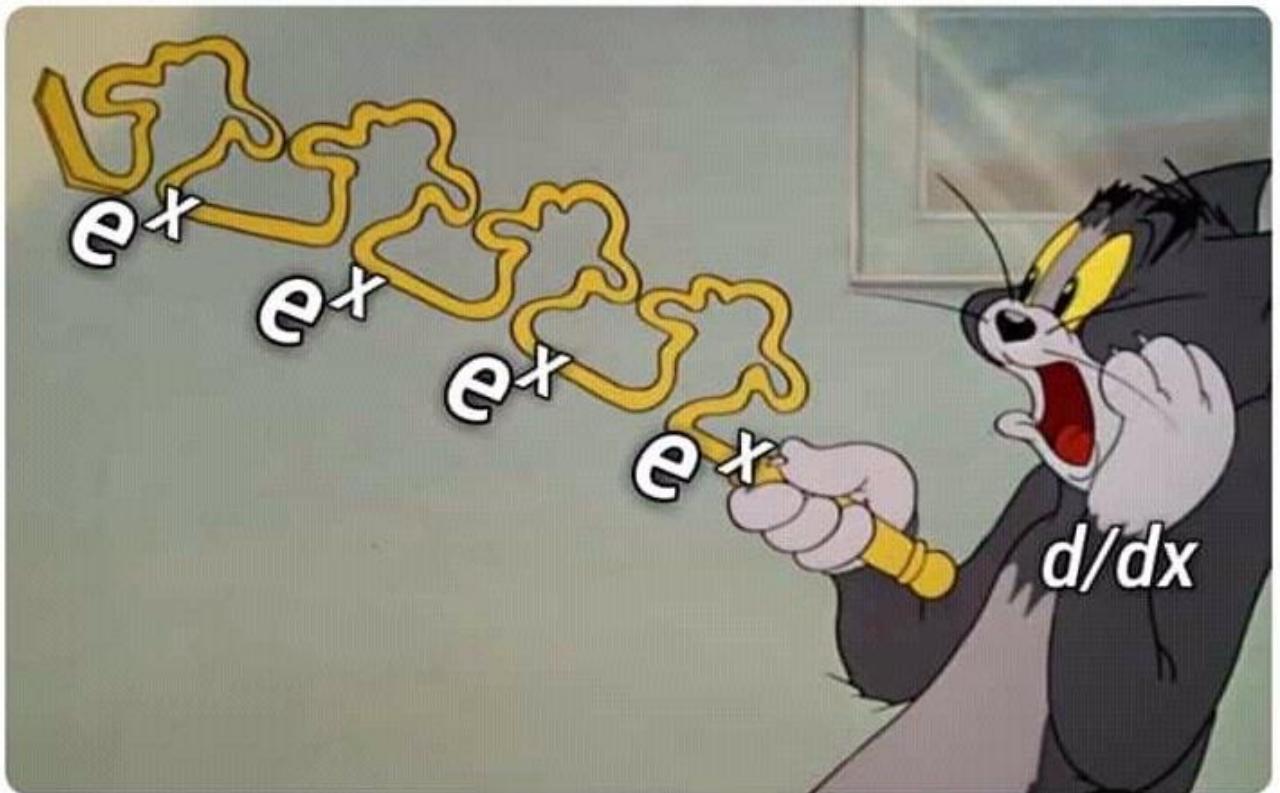
$$f'(x) = \cos x$$

Derivacija trigonometrijskih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Derivacija eksponencijalne i logaritamske funkcije

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$



Derivacija eksponencijalne i logaritamske funkcije

Derivacija eksponencijalne funkcije i
definicija broja e

<https://www.youtube.com/watch?v=m2MIpDrF7Es>

Pravila: umnožak funkcije i skalara

$$f(x) = c \cdot g(x)$$

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot g(x + \Delta x) - c \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = c \cdot g'(x)$$

Pravila: umnožak funkcije i skalara

$$f(x) = c \cdot g(x)$$

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Derivirajte: $f(x) = 3x^5$

Derivirajte: $f(x) = e^2 \ln x$

$$f'(x) = 3 \cdot 5x^4$$

$$f'(x) = e^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 15x^4$$

$$f'(x) = \frac{e^2}{x}$$

Pravila: zbroj i razlika funkcija

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Pravila: zbroj i razlika funkcija

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Derivirajte: $f(x) = 3x^5 - 2\sin x + \ln 5$

$$f'(x) = 3 \cdot 5x^4 - 2 \cdot \cos x + 0$$

$$f'(x) = 15x^4 - 2\cos x$$

Pravila: zbroj i razlika funkcija

Odredite derivaciju funkcije $f(x) = 8\sqrt{x} + \frac{x^4}{16} + \pi$ u točki $x = 4$.

$$f(x) = 8x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}x^4 + \pi$$

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} \cdot 4x^3 + 0$$

$$f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{x^3}{4}$$

$$f'(4) = \frac{4}{\sqrt{4}} + \frac{4^3}{4} = 2 + 16 = 18$$

Pravila: umnožak funkcija

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Pravila: umnožak funkcija

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Pravila: umnožak funkcija

Odredite derivaciju funkcije $f(x) = (x + 2)(x^2 - 1)$ na dva načina.

Prvi način: pravilo umnoška

$$f'(x) = (x + 2)'(x^2 - 1) + (x + 2)(x^2 - 1)'$$

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 - 1) + (x + 2) \cdot 2x$$

$$f'(x) = x^2 - 1 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 4x - 1$$

Pravila: umnožak funkcija

Drugi način: pravilo zbrajanja i oduzimanja

$$\begin{aligned}f(x) &= (x + 2)(x^2 - 1) \\ &= x^3 + 2x^2 - x - 2\end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 2x - 1 - 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

Pravila: kvocijent funkcija

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Pravilo za kvocijent se izvodi na sličan način kao i pravilo za umnožak, no zbog duljine izvoda ga nećemo pisati korak po korak.

Pravila: kvocijent funkcija

Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \frac{2x}{\cos x}$.

$$f'(x) = \frac{(2x)' \cdot \cos x - 2x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cos x + 2x \sin x}{\cos^2 x}$$

Pravila: kvocijent funkcija

Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na dva načina.

Prvi način: pravilo za kvocijent

$$f'(x) = \frac{(1)' \cdot x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

Pravila: kvocijent funkcija

Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na dva načina.

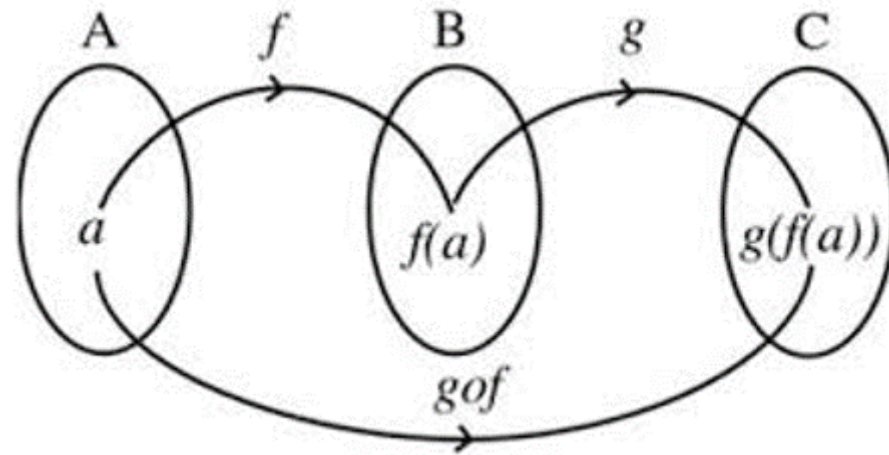
Drugi način: pravilo za potencije

$$f(x) = x^{-2}$$

$$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Složena funkcija

Kompozicija funkcija je način opisivanja uzastopnog djelovanja dvije ili više funkcija.



Zapis složene funkcije: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Derivacija složene funkcije

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivirajte funkciju $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \cdot (x^2 + x)' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

Derivacija složene funkcije

Zadana je funkcija $f(x) = \ln(5x) + \ln(25x) + \log_3 8$.

Pronađite pogrešku u njenoj derivaciji:

$$f'(x) = \frac{1}{5x} + \frac{1}{25x} + \frac{1}{8 \ln 3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5x} \cdot 5 + \frac{1}{25x} \cdot 25$$

$$f'(x) = \frac{1}{5x} + \frac{1}{25x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

Derivacija složene funkcije

Derivirajte sljedeće funkcije:

$$\text{a) } f(x) = \sin^2 x \qquad f'(x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\text{b) } g(x) = \sin x^3 \qquad g'(x) = 3x^2 \cos x^3$$

$$\text{c) } h(x) = \sin^2 x^3 \qquad h'(x) = 6x^2 \sin x^3 \cos x^3$$

Derivacija složene funkcije

Derivirajte sljedeće funkcije:

$$\text{a) } f(x) = \sin \cos x \qquad f'(x) = -\cos \cos x \cdot \sin x$$

$$\text{b) } g(x) = \sin x \cos x \qquad g'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\text{c) } h(x) = \sin 3 \cos x \qquad h'(x) = -\sin 3 \sin x$$

Hvala 😊