

3.1 Uvjetna vjerojatnost

Pretpostavimo da urna sadrži deset kuglica numeriranih brojevima $1, 2, 3, \dots, 10$.

- Kolika je vjerojatnost da je izvučena kuglica s brojem 1?
- Kolika je vjerojatnost da je izvučena kuglica s brojem 1, ukoliko je poznato da je izvučena kuglica s neparnim brojem?

Bacamo dvije kocke. Neka je

$$A = \{\text{na prvoj kocki je pao broj } 3\}$$

$$B = \{\text{umnožak brojeva na kockama je } 12\}.$$

Od 36 elementarnih događaja, događajima A i B pripadaju sljedeći:

$$A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

$$B = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}.$$

\implies

$$P(A) = \frac{6}{36}, \quad P(B) = \frac{4}{36}.$$

Kolika je vjerojatnost događaja A , ako je poznato da se realizirao događaj B ?

Definicija uvjetne vjerojatnosti

Neka je $B \in \mathcal{F}$ događaj pozitivne vjerojatnosti: $P(B) > 0$. Uvjetna vjerojatnost uz uvjet B je funkcija $P_B : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$ definirana formulom

$$P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Primjer 3.1.

Iz snopa od 52 karte slučajno je izvučena jedna karta. Kolika je vjerojatnost da je ta karta

- a) kralj, ako je poznato da je izvučena karta pik boje,
- b) pik boje, ako je poznato da je izvučena karta kralj?

Primjer 3.2.

U jednoj kutiji je 8 bijelih i 10 crnih kuglica. Slučajno odabiremo 3 kuglice. Kolika je vjerojatnost da su sve izvučene kuglice bijele, ako je poznato da su sve izvučene kuglice iste boje?

Primjer 3.3.

Neka su A i B događaji takvi da je $P(A) = \frac{13}{30}$, $P(B) = \frac{7}{15}$,
 $P(A \cup B) = \frac{11}{15}$. Odredite uvjetne vjerojatnosti $P(A|B)$ i $P(\bar{A}|B)$.

Primjer 3.4.

Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana permutacija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ počinje parnom znamenkom, ako je poznato da završava neparnom znamenkom?

Vjerojatnost presjeka (umnoška)

Vjerojatnost presjeka dvaju događaja računa se formulom

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

Analogno je $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$.

Primjer 3.5.

U košari se nalazi 5 jabuka i 10 krušaka. Izvlačimo dvije voćke, jednu za drugom, bez vraćanja. Kolika je vjerojatnost da su izvučene dvije jabuke?

Primjer 3.6.

Student polaže usmeni ispit iz kolegija Vjerojatnost i statistika. Zna odgovore na 35 pitanja od mogućih 50. Ako se tri pitanja izvlače jedno za drugim, bez vraćanja, odredite vjerojatnost da će student znati odgovoriti na sva tri pitanja.

3.2 Nezavisnost događaja

Primjer 3.7.

U košari se nalazi 5 jabuka i 10 krušaka. Izvlačimo dvije voćke, jednu za drugom. Kolika je vjerojatnost da će druga izvučena voćka biti jabuka, ako je prva izvučena voćka bila jabuka? Kolika je ta vjerojatnost ako je prva voćka bila kruška? Izračunajte obje ove vjerojatnosti u sljedeća dva slučaja:

- a) prva se voćka nakon izvlačenja ne vraća u košaru,
- b) prva se voćka nakon izvlačenja vraća u košaru.

Definicija i kriterij nezavisnosti događaja

Za događaje A i B kažemo da su nezavisni, ako vrijedi bilo koja od jednakosti: $P(A|B) = P(A)$ ili $P(B|A) = P(B)$.

Nužan i dovoljan uvjet za nezavisnost jest da bude:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Za nezavisne događaje vrijedi:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B),$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Primjer 3.8.

Jesu li nezavisni događaji A i B , ako je $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$ i $P(A \cup B) = 0.6$?

Primjer 3.9.

Bacamo dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da na prvoj kocki bude prost, a na drugoj složen broj?

Primjer 3.10.

Neka su A i B nezavisni događaji. Dokažite da su tada događaji \bar{A} i B također nezavisni.

Nezavisnost skupine događaja

Događaji A_1, A_2, \dots, A_n su nezavisni ako za svaki k , $2 \leq k \leq n$ i svaki izbor $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ nekolicine tih događaja vrijedi

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Primjer 3.11.

Kada su tri događaja A, B, C nezavisna?

Primjer 3.12.

Bacamo dvije kocke. Dani su događaji:

$$A = \{\text{na prvoj kocki je pao broj manji ili jednak 3}\},$$

$$B = \{\text{na drugoj kocki je pao broj veći od 2}\},$$

$$C = \{\text{zbroj dobivenih brojeva je 7}\}.$$

Da li su događaji A , B i C nezavisni?

Primjer 3.13.

Tri strijelca gađaju metu nezavisno jedan od drugog. Vjerojatnost pogotka prvog je 0.85, drugog 0.91, a trećeg 0.73. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

- a) sva tri strijelca su pogodila metu,
- b) barem jedan strijelac je pogodio metu,
- c) točno jedan strijelac je pogodio metu.