

# MATEMATIČKA ANALIZA

## Tok funkcije

# Asimptote

Asimptota krivulje:

- pravac čije se točke približavaju po volji blizu točkama zadane krivulje kada jedna ili više koordinata točaka krivulje teži u beskonačnost.
- tangenta u beskonačno dalekoj točki
- horizontalna, vertikalna, kosa asimptota

# Asimptote

Vertikalna asimptota (V.A.)

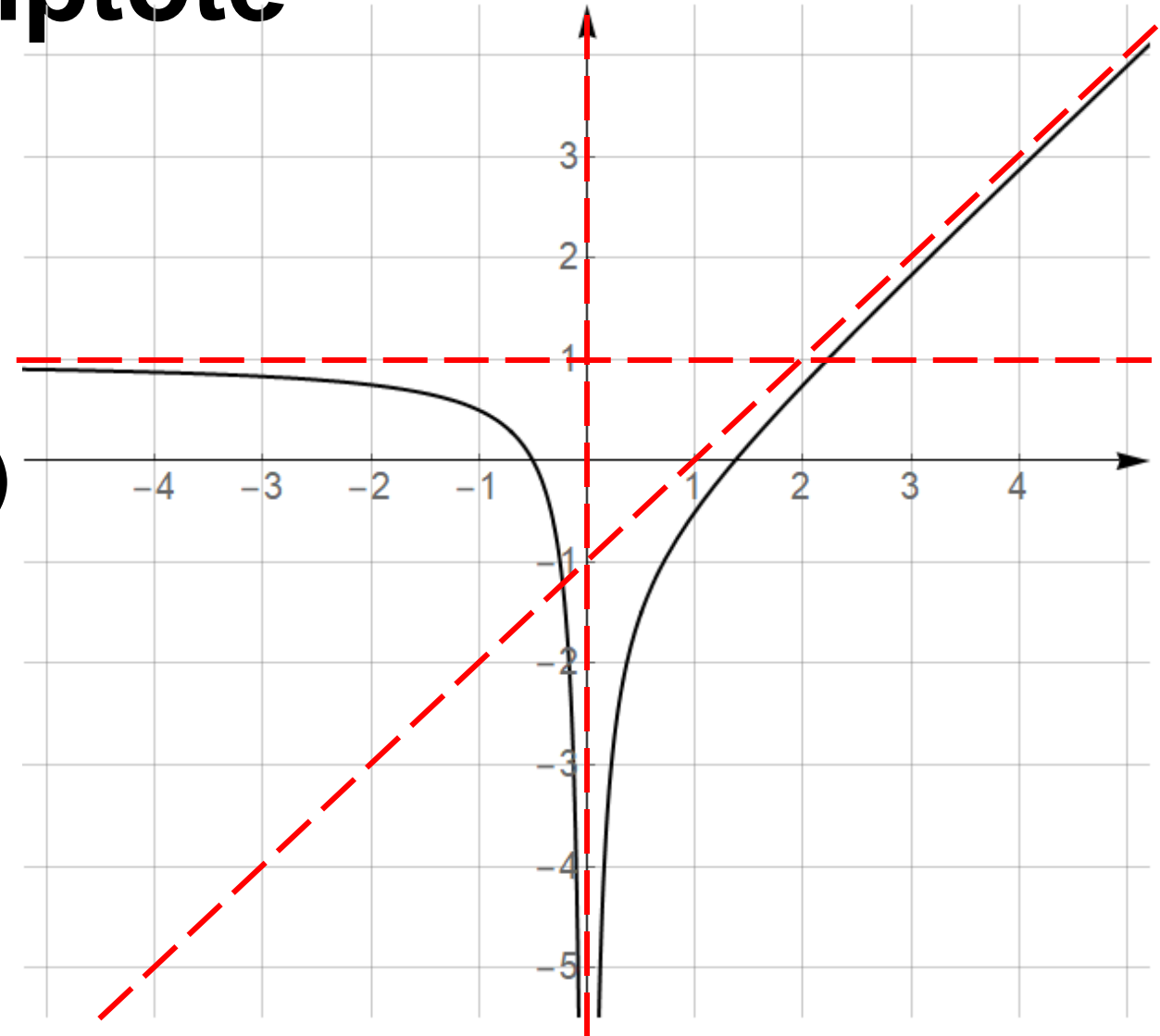
$$x = a$$

Horizontalna asimptota (H.A.)

$$y = b$$

Kosa asimptota (K.A.)

$$y = kx + l$$



# Vertikalna asimptota

Kandidati za vertikalnu asimptotu su točke na rubu domene  $x_0, x_1, \dots$

Neka je  $D \subseteq \mathbb{R}$  domena funkcije, takva da je  $x_0$  rubna točka te domene,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Pravac  $x = x_0$  je **vertikalna asimptota** grafa funkcije  $f(x)$  ako je vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$$

# Horizontalna asimptota

Horizontalna asimptota može postojati ukoliko se domena funkcije neograničeno proteže u pozitivnom ili negativnom smjeru.

Neka je  $D \subseteq \mathbb{R}$  domena funkcije takva da se  $D$  neograničeno proteže u pozitivnom ili negativnom smjeru,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Pravac  $y = a$  je **horizontalna asimptota** grafa funkcije  $f(x)$  ako vrijedi:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$$

# Kosa asimptota

Neka je  $D \subseteq \mathbb{R}$  domena funkcije  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  koja se neograničeno proteže u pozitivnom ili negativnom smjeru.

Pravac  $y = kx + l$  je **kosa asimptota** grafa funkcije  $f(x)$ , ako postoje brojevi  $k \neq 0$  i  $l$  takvi da vrijedi:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$$

# Asimptote

Funkcija može imati vertikalne asimptote ukoliko postoje konačni brojevi koji su rubovi domene.

Vertikalnih asimptota može biti po volji mnogo.

Funkcija može imati horizontalnu asimptotu ukoliko se domena proteže u beskonačnost.

Postoje najviše dvije horizontalne asimptote.

Ukoliko funkcija ima horizontalnu asimptotu, tada nema kosu asimptotu.

Primjer 1. Odredite asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] = \infty$$

$x = 0$  je vertikalna  
asimptota

Horizontalna asimptota:

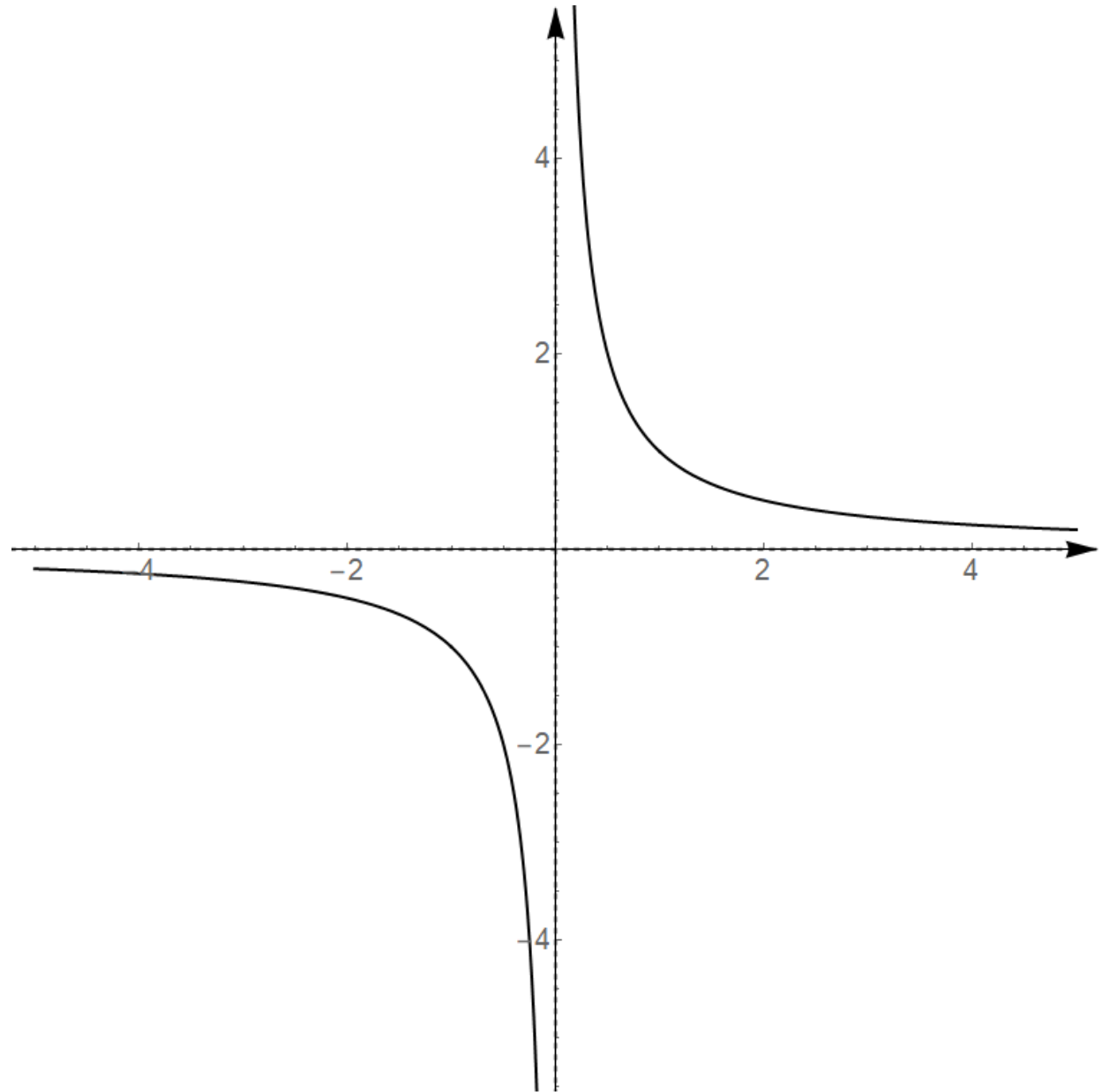
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \infty \end{array} \right] = 0$$

$y = 0$  je horizontalna  
asimptota



Primjer 1. Odredite  
asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



Primjer 2. Odredite asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Vertikalna asimptota:

- ne postoji
- zašto?

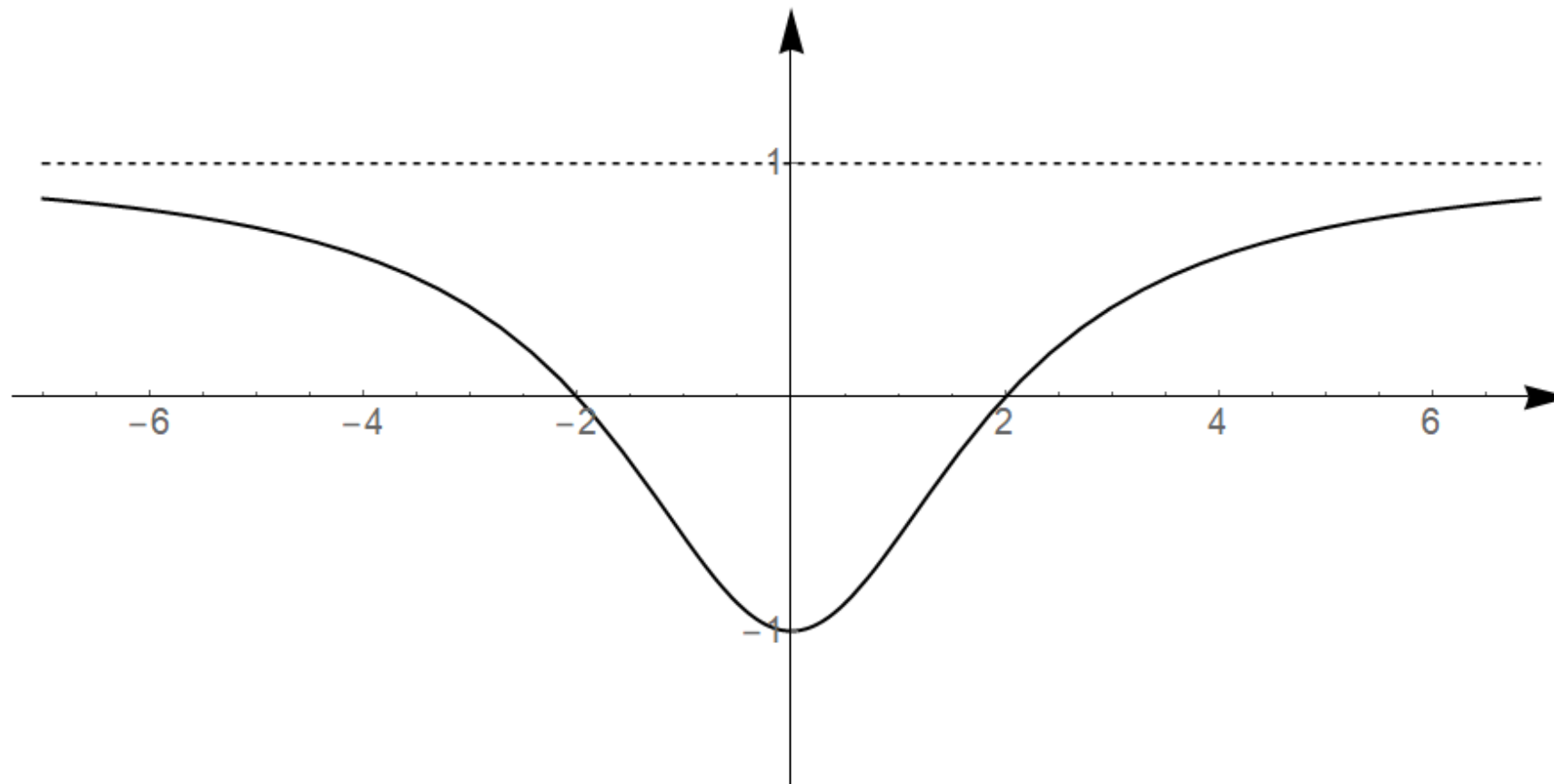
Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 1$$

$y = 1$  je horizontalna  
asimptota

Primjer 2. Odredite asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$



Primjer 3. Odredite asimptote na graf funkcije

$$g(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 1}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5}{x - 1} = \infty$$

$x = 1$  je vertikalna  
asimptota

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 5}{x - 1} = \infty$$

Ne postoji horizontalna  
asimptota.

Primjer 3. Odredite asimptote na graf funkcije

$$g(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 1}$$

Kosa asimptota:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 5}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 5}{x^2 - x} = 1$$

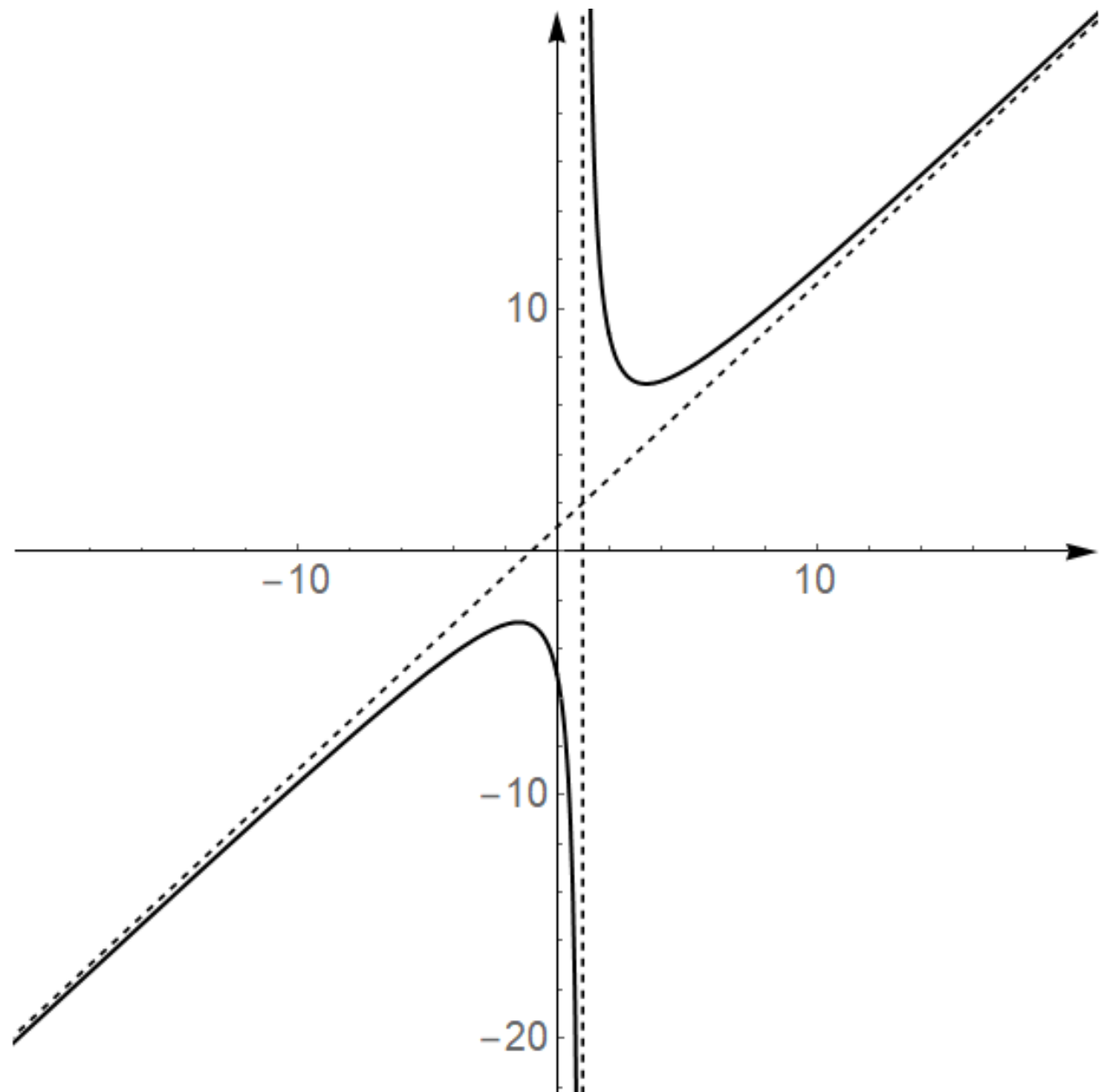
$$l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 + 5}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 5}{x - 1} = 1$$

Pravac  $y = x + 1$  je kosa asimptota.

Primjer 3.

Odredite asimptote na graf funkcije

$$g(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 1}$$



Primjer 4. Odredite asimptote na graf funkcije

$$h(x) = x \cdot e^x$$

$D(f) = \mathbb{R}$       Vertikalna asimptota ne postoji.

Horizontalna asimptota:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x &= [-\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \text{L'H} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \left[ \frac{1}{-\infty} \right] = 0 \end{aligned}$$

Pravac  $y = 0$  je H.A za  $x \rightarrow -\infty$ .

Primjer 4. Odredite asimptote na graf funkcije

$$h(x) = x \cdot e^x$$

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^x = [\infty \cdot \infty] = \infty$$

Za  $x \rightarrow \infty$  H.A. ne postoji.

Kosa asimptota:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^x}{x} = \infty$$

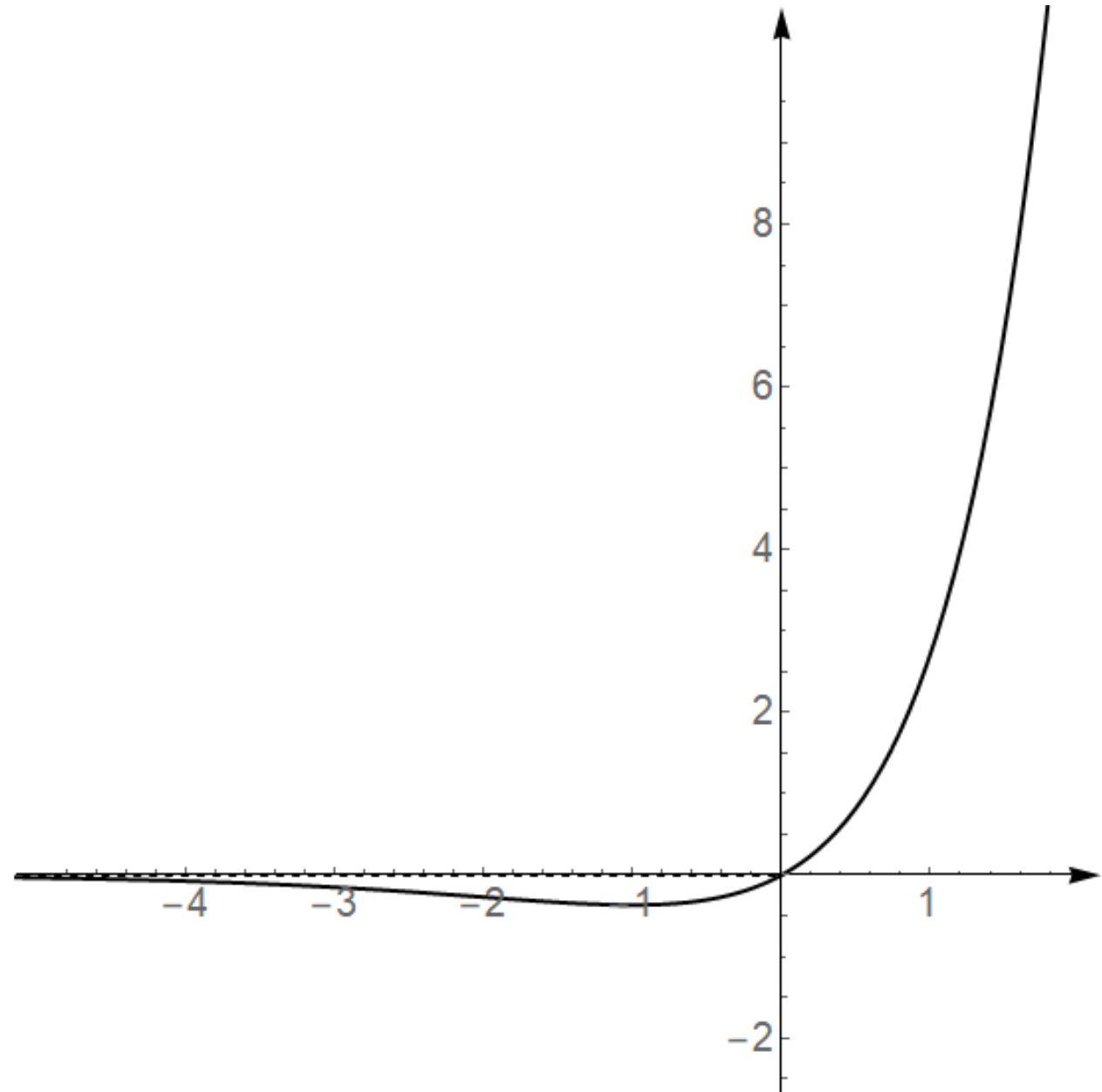
Kosa asimptota ne postoji.



Primjer 4.

Odredite asimptote na graf funkcije

$$h(x) = x \cdot e^x$$



Primjer 5. Odredite asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Domena:

1.  $x > 0$

2.  $\ln x \neq 0$

$x \neq 1$

$$D(f) = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$$

Vertikalne asimptote:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = \left[ \frac{0}{-\infty} \right] = 0$$

U rubu domene  $x = 0$   
graf funkcije nema  
vertikalnu asimptotu.

Primjer 5. Odredite asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Vertikalne asimptote:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\ln x} = \left[ \frac{1}{0} \right] = \infty$$

Pravac  $x = 1$  je  
vertikalna asimptota.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

Ne postoji horizontalna asimptota.

Primjer 5. Odredite  
asimptote na graf funkcije

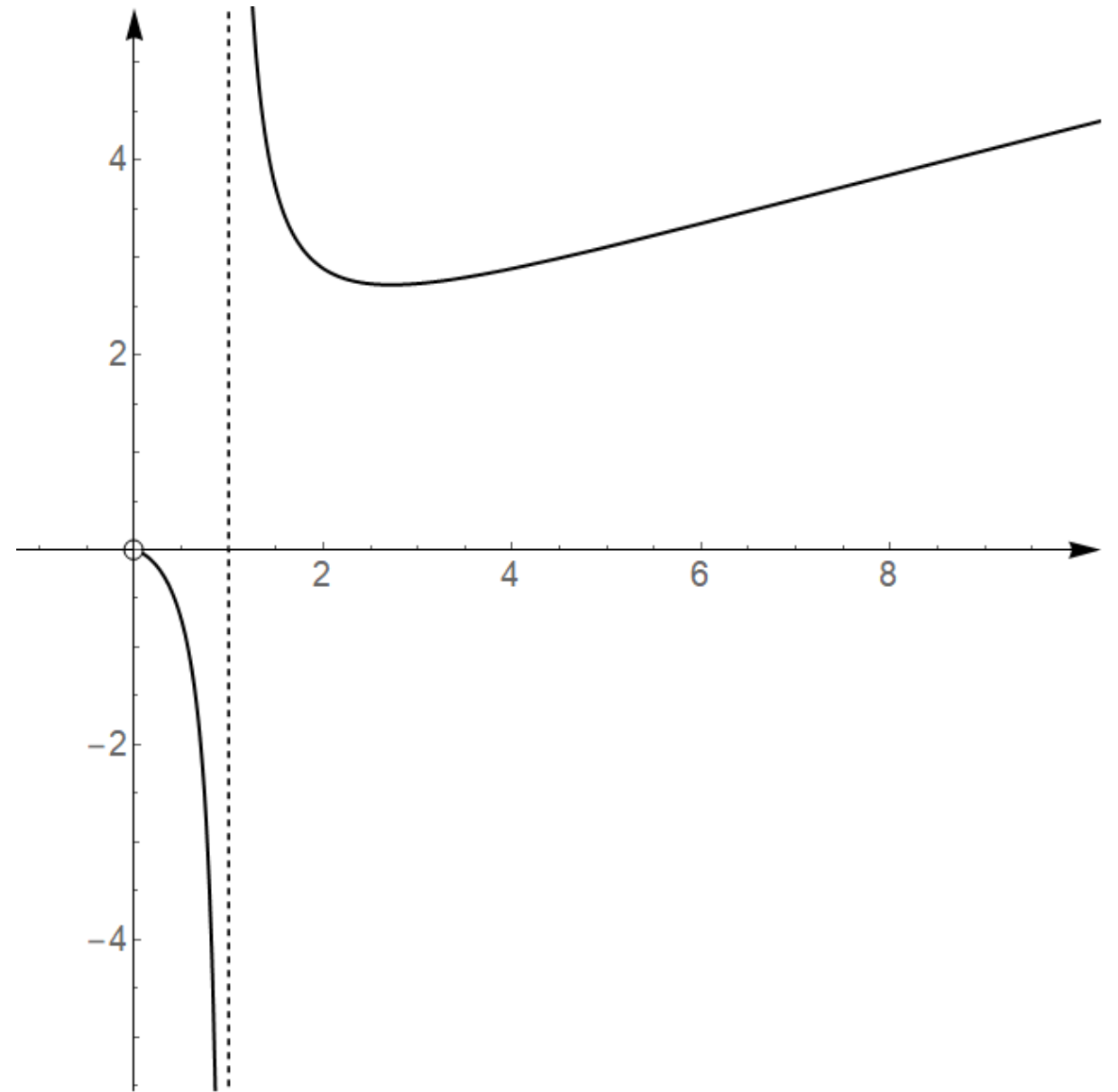
$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Kosa asimptota:

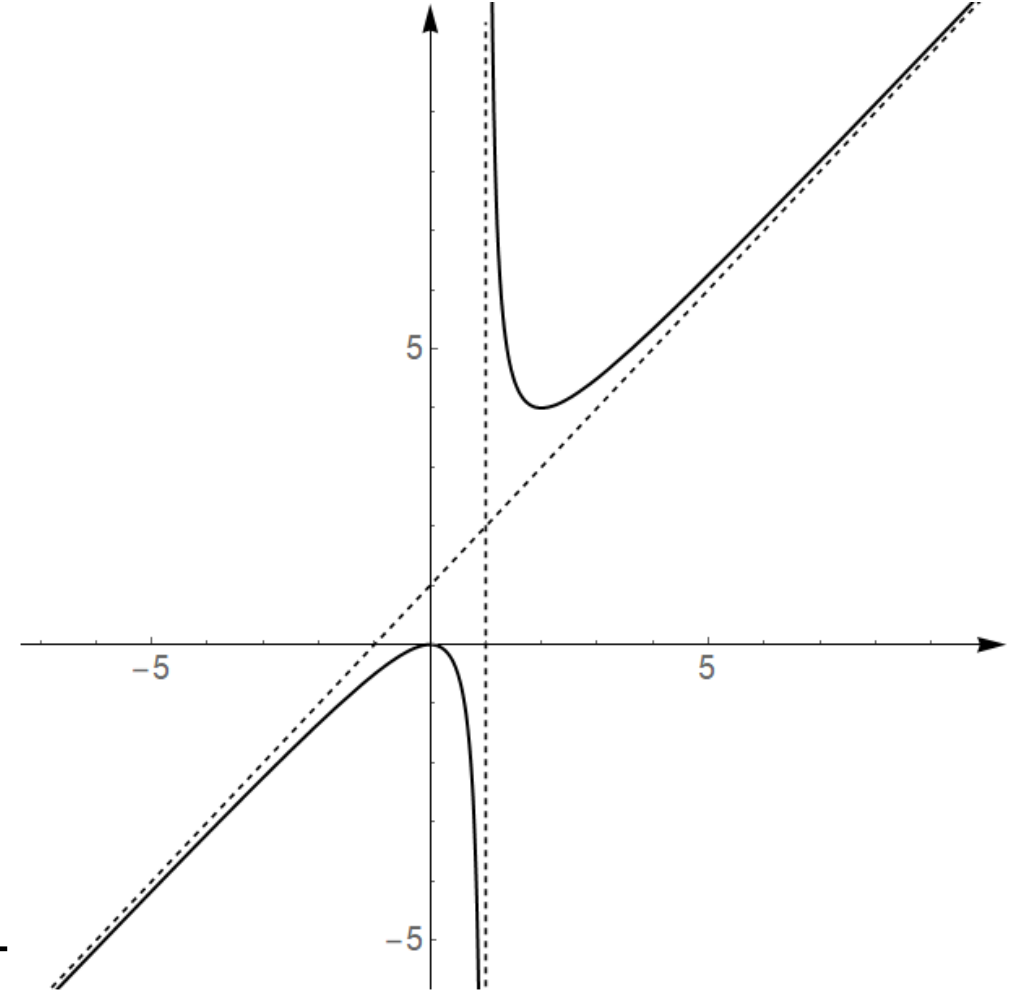
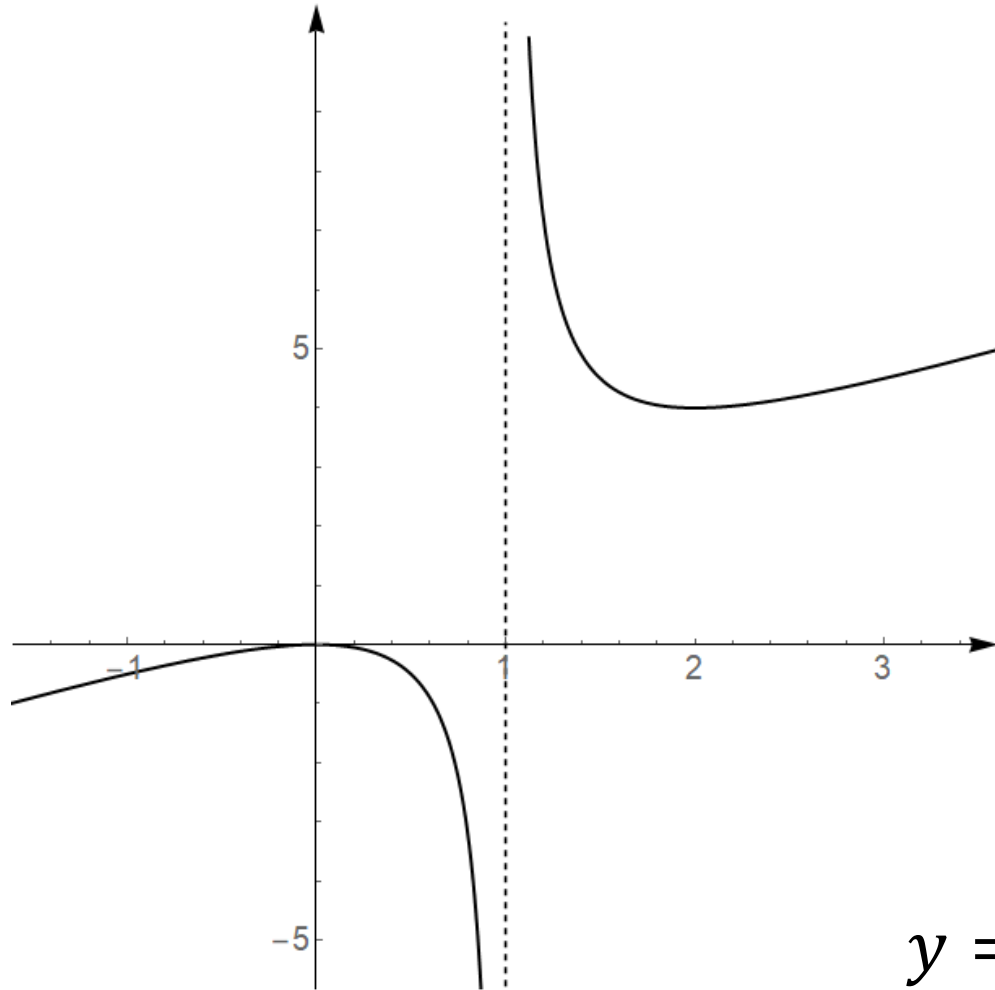
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} = \left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0$$

Ne postoji kosa asimptota.

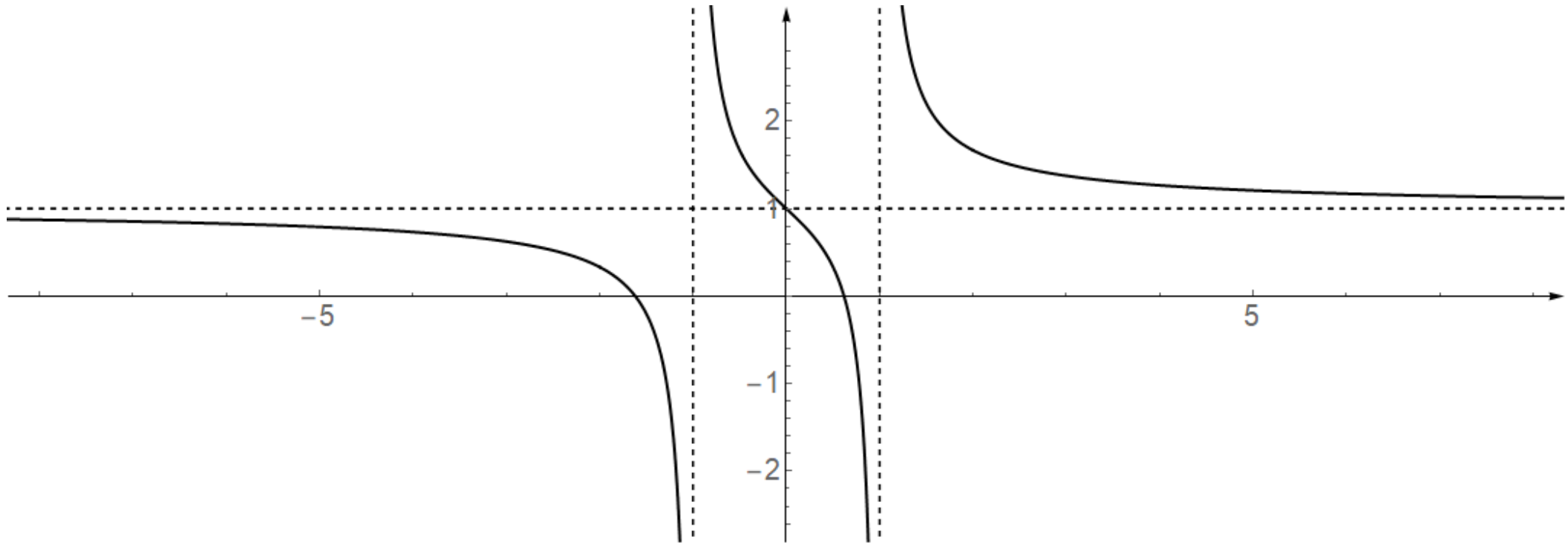


# Asimptote



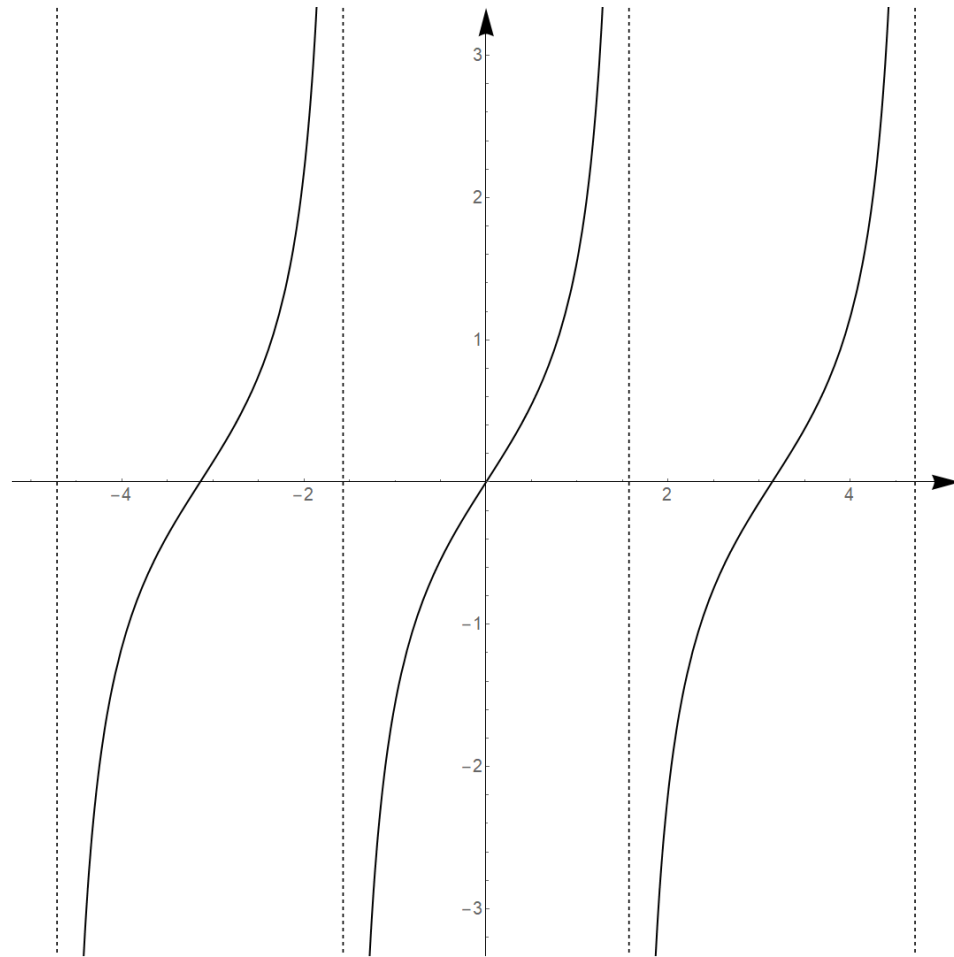
$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

# Asimptote

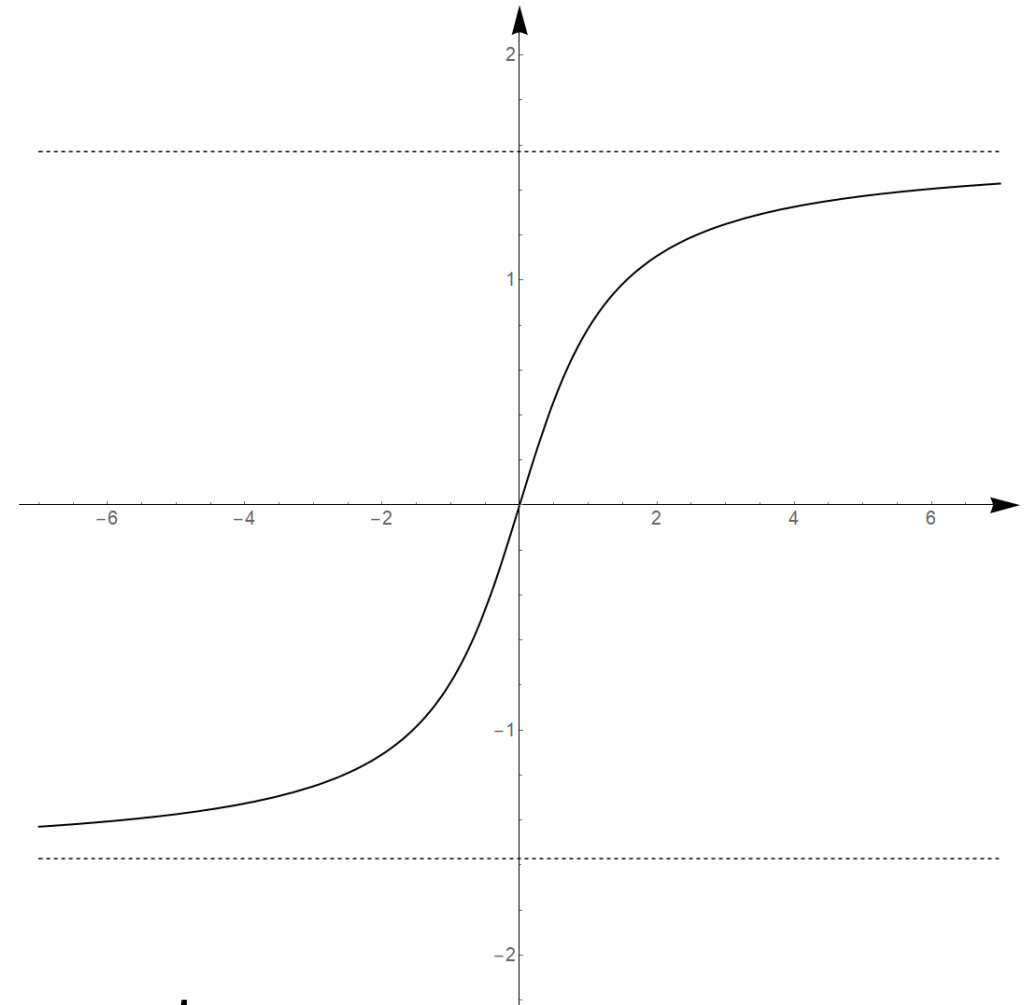


$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

# Asimptote



$$y = \operatorname{tg} x$$



$$y = \operatorname{arctg} x$$

# Tok funkcije

1. Domena
2. Nultočke
3. Monotonost (rast / pad)
4. Ekstremi
5. Zakrivljenost (konkavnost / konveksnost)
6. Točke infleksije (pregiba)
7. Asimptote
8. Graf funkcije



Primjer 6. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$$

1. Domena:  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2. Nul-točke:  $x^2 = 0$        $x = 0$        $N(0,0)$

3. Monotonost i ekstremi:

$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x - 2) - x^2 \cdot (x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$$

Primjer 6. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

	$-\infty$		$0$		$2$		$4$		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		-		+	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

Funkcija raste za  $x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$ .

Funkcija pada za  $x \in \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle$ .

Primjer 6. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		-		+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

*MAX*

$T_1(0,0)$

*MIN*

$T_2(4,8)$

Primjer 6. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

5. Zakrivljenost i točke infleksije:

$$f'''(x) = \frac{8}{(x-2)^3} \quad \frac{8}{(x-2)^3} = 0$$

	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-		+	
$f(x)$		n		u	

Jednadžba nema rješenja. Funkcija je konveksna za  $x \in \langle 2, \infty \rangle$ .

Ne postoje točke infleksije. Funkcija je konkavna za  $x \in \langle -\infty, 2 \rangle$ .

Primjer 6. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$$

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x - 2} = \left[ \frac{4}{0} \right] = \infty \quad \text{Pravac } x = 2 \text{ je vertikalna asimptota.}$$

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x - 2} = \dots = \infty \quad \text{Nema horizontalnih asimptota.}$$

Primjer 6. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

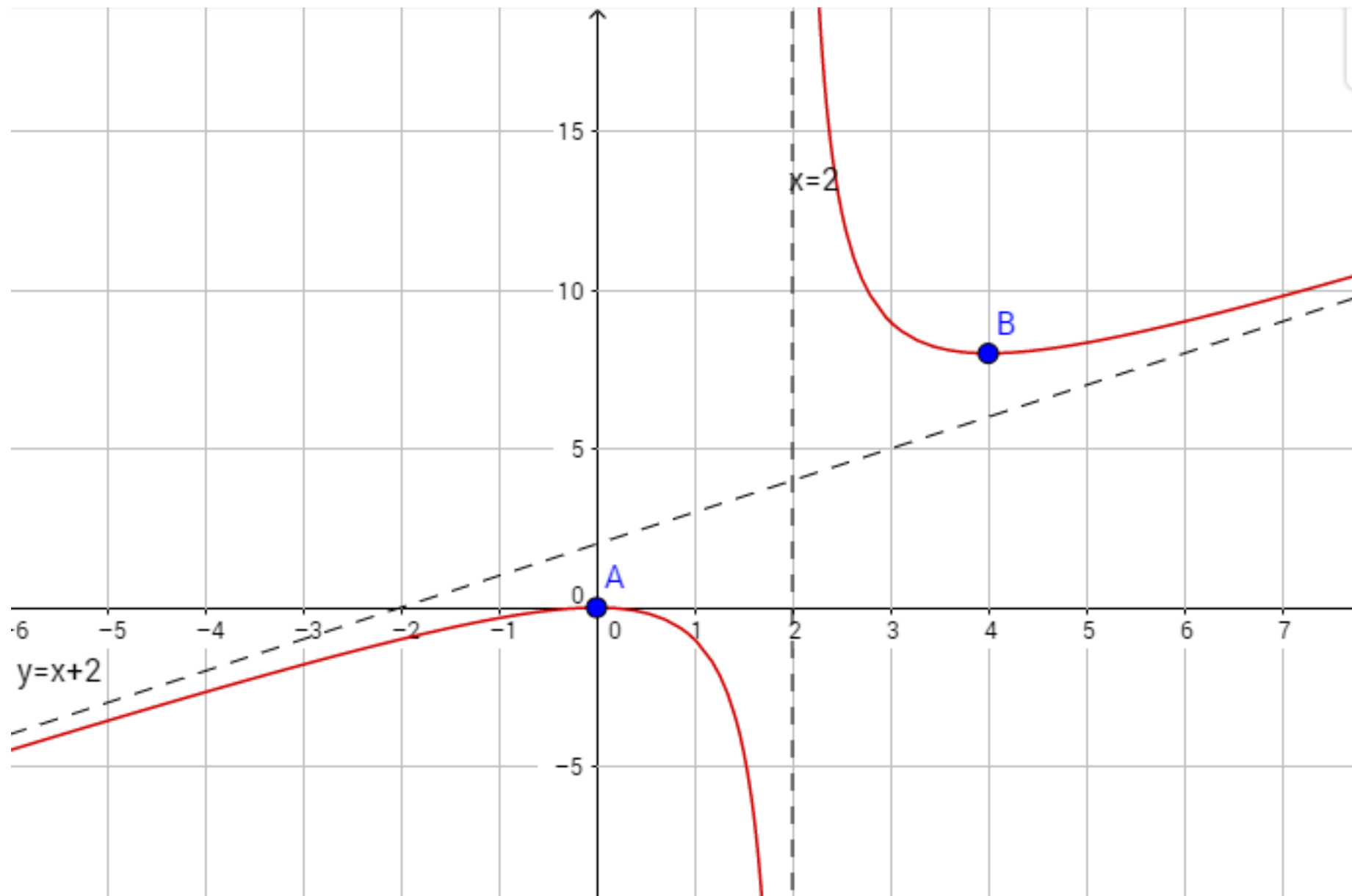
$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$$

Kosa asimptota:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \dots = 1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x - 2} = 2$$

Pravac  $y = x + 2$   
je kosa asimptota.



## Linkovi na video materijale Tonija Miluna:

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXyggnSpBk5Rwb9Z1IQAJYI4fbgEjSkBD>

**(asimptote, svi videozapisi)**

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXyggnSpBk5QSmNA-ya7U9bf9UVVuJBHg>

**(tok funkcije, svi videozapisi)**



Hvala 😊