MATEMATIKA

Skupovi

Skupovi

Knjiga „*Matematika za IT*"

- Poglavlje „Skupovi", str. 70. – 88.

Definicija skupa

Što je skup?

Ne postoji jednostavan odgovor na to pitanje.

Skup je temeljni pojam matematičke teorije, pomoću kojeg opisujemo i definiramo sve druge pojmove.

Kako onda definirati ili opisati temeljni pojam, pomoću kojih se opisuju svi drugi pojmovi u matematici?

Definicija skupa

Jedan od prvih pokušaja definiranja skupa bio je **princip komprehenzije**.

To je načelo koje kaže da se skup opisuje nekim svojstvom njegovih članova.

Na primjer:

- skup svih studenata koji sjede u ovoj dvorani
- skup svih prirodnih brojeva djeljivih s 5
- skup svih funkcija koje imaju inverz

Definicija skupa

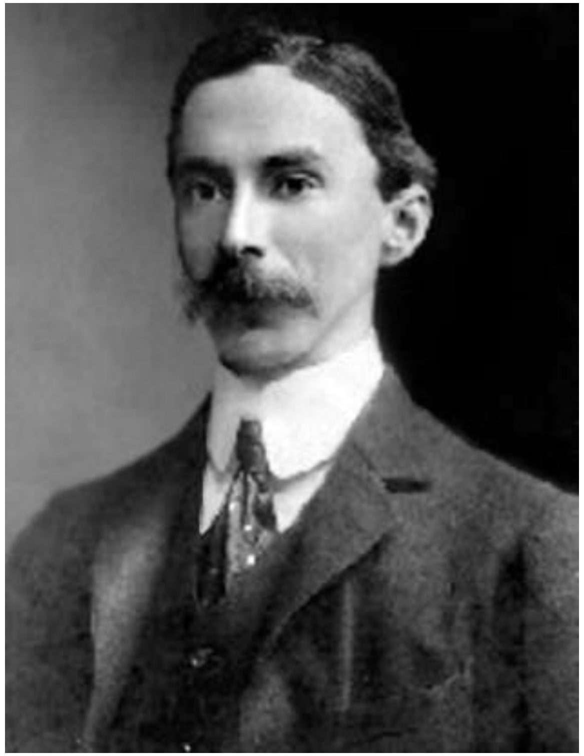
Princip komprehenzije doveo je i do prvog paradoksa u teoriji skupova (a time i u matematici općenito).

Russelov paradoks

Normalni skup = skup koji ne sadrži sam sebe kao svoj element

R = skup svih i samo normalnih skupova

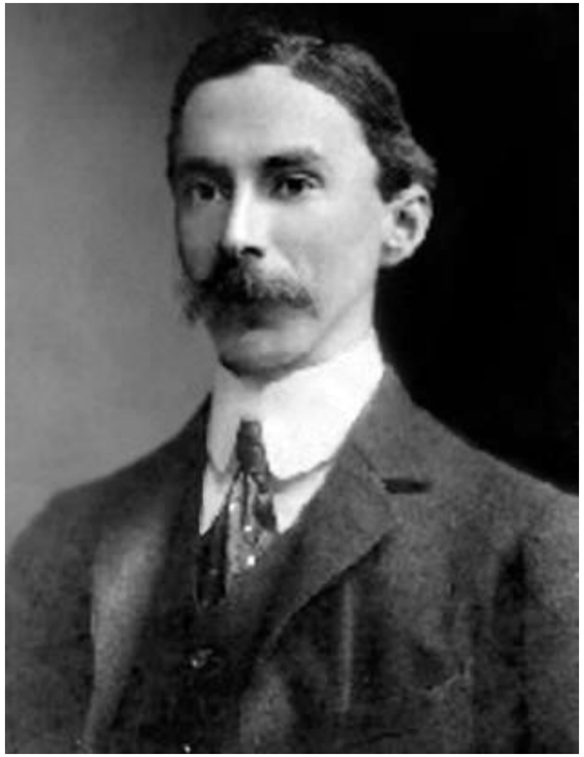
Je li R normalan skup?



Definicija skupa

Russelov paradoks

U nekom selu postoji brijač, koji brije **sve** muškarce koji ne briju sami sebe **i nikog drugog**.



Brije li taj brijač samog sebe?

Paradoksi su opasni za logičke (matematičke) teorije, zato jer je u teoriji u kojoj egzistira paradoks moguće dokazati bilo koju tvrdnju.

Definicija skupa

Moderna teorija skupova skup definira pomoću **principa iteracije**.

Skupovi prve vrste mogu sadržavati samo elemente koji nisu skupovi.

Skupovi druge vrste mogu sadržavati samo elemente koji nisu skupovi ili su skupovi prve vrste.

Skupovi treće vrste mogu sadržavati samo elemente koji nisu skupovi ili su skupovi prve ili druge vrste. I tako dalje.

Takva struktura skupova se naziva **kumulativna hijerarhija**.

Definicija skupa

Princip iteracije nam i dalje omogućava zadavanje skupa pomoću nekog svojstva, samo što rezultat mora biti skup koji pripada kumulativnoj hijerarhiji.

Skupove zadajemo na dva načina:

1. navođenjem pravila koje zadovoljavaju njegovi elementi
2. nabrajanjem svih elemenata skupa

Skupove označavamo velikim štampanim slovima: $A, B, D, K, \mathbb{N}, \mathbb{R}$ ...

Definicija skupa

Kada skup zadajemo nabrajanjem njegovih članova, tada elemente nabrajamo unutar vitičastih zagrada:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Slične oznake koristimo i prilikom zadavanja skupa pravilom

$$S = \{x : x \text{ je prirodan broj dijeljiv s } 5\}$$

$$F = \{f : f \text{ je funkcija koja ima inverz}\}$$

Definicija skupa

Temeljna relacija koju koristimo u radu sa skupovima jest relacija „biti element”, u oznaci: ∈.

Tvrdnja $a \in S$ je istinita onda i samo onda ako se objekt a nalazi među elementima skupa S.

Istaknimo jedan važan skup: prazan skup, ∅

Prazan skup je skup koji ne sadrži niti jedan element.

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}$$

Dakle, prazan skup možemo definirati kao skup svih objekata koji su različiti sami od sebe.

Definicija skupa

U matematici imamo još jedan način zapisa, koji koristimo kod opisivanja skupova realnih brojeva.

Interval predstavlja sve realne brojeve koji zadovoljavaju nejednadžbu oblika $a < x < b$.

Preciznije:

$$\langle a, b \rangle = \{x : \; a < x < b\}$$

$$\langle a, \infty \rangle = \{x : \; a < x\}$$

$$\langle -\infty, b \rangle = \{x : \; x < b\}$$

Definicija skupa

Interval kojemu su granice uključene u skup ponekad nazivamo i **zatvoreni interval** ili **segment**. To su svi realne brojeve koji zadovoljavaju nejednadžbu oblika $a \leq x \leq b$.

Preciznije:

$$[a, b] = \{x : \ a \leq x \leq b\}$$

$$[a, \infty\rangle = \{x : \ a \leq x\}$$

$$\langle -\infty, b] = \{x : \ x \leq b\}$$

Moguće je i kombiniranje granica: $[a, b\rangle = \{x : \ a \leq x < b\}$

Jednakost skupova

Za dva skupa kažemo da su jednaka ukoliko imaju sve iste članove.

Ta se definicija (aksiom) još naziva i **princip ekstenzionalnosti**.

Po tom principu skupovi su isti, bez obzira na koji su način zadani ili definirani – samo ako imaju sve iste članove.

$$\{-1,1\} = \{1,-1\} = \{-1,1,-1\}$$

$$= \{x : x \text{ je cijeli broj koji dijeli } 1\}$$

$$= \{x : x \text{ je rješenje jednadžbe } x^2 = 1\}$$

Jednakost skupova

Drugi način da kažemo da su skupovi A i B jednaki, jest:

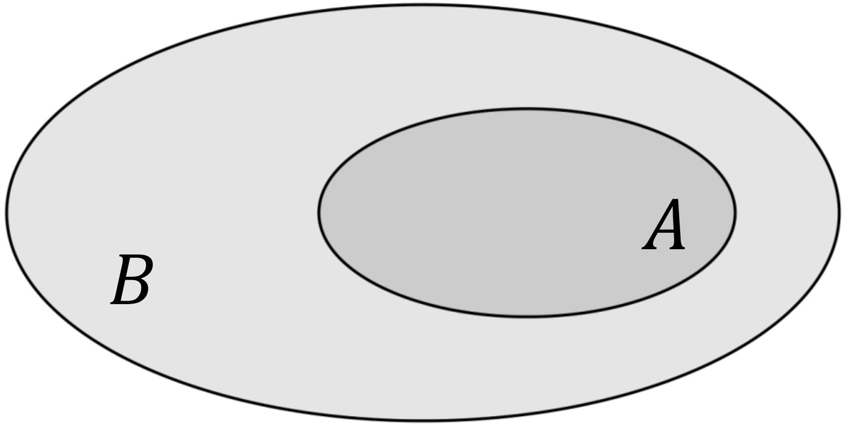
Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, **i ako** je svaki element skupa B ujedno i element skupa A.

Što ako vrijedi samo pola te tvrdnje?

Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, **ali** skup B sadrži elemente koji nisu u skupu A.

Tada kažemo da je A podskup od B.

$$A \subseteq B$$



Podskup

Primijetimo kako je svaki skup svoj podskup, tj. $S \subseteq S$.

Kada želimo istaknuti kako je skup A sadržan u skupu B, ali ne i obrnuto, kažemo kako je A **pravi podskup** skupa B.

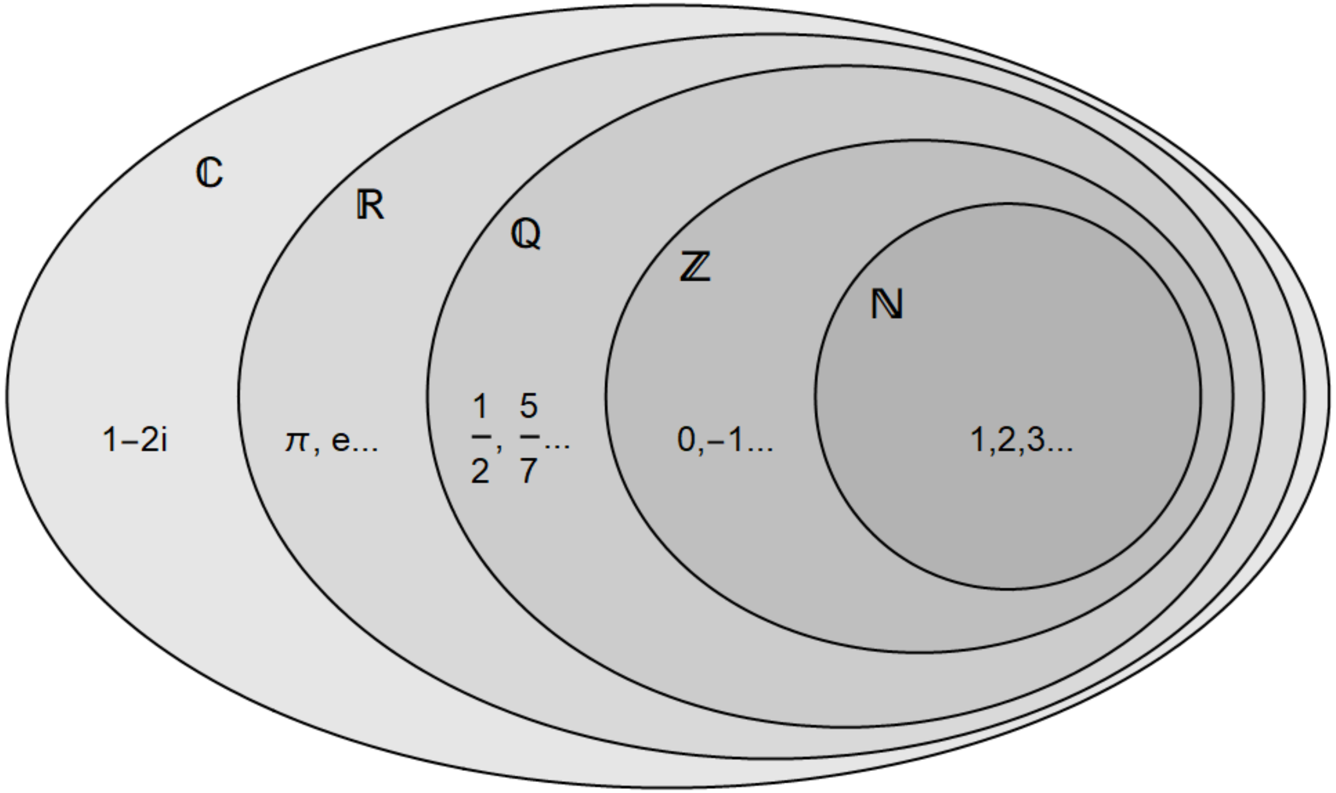
$$A \subset B$$

Također, za svaki skup S, vrijedi $\emptyset \subseteq S$, tj. prazan skup je podskup svakog skupa.

Podskup

Za skupove brojeva vrijedi:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



Skupovi

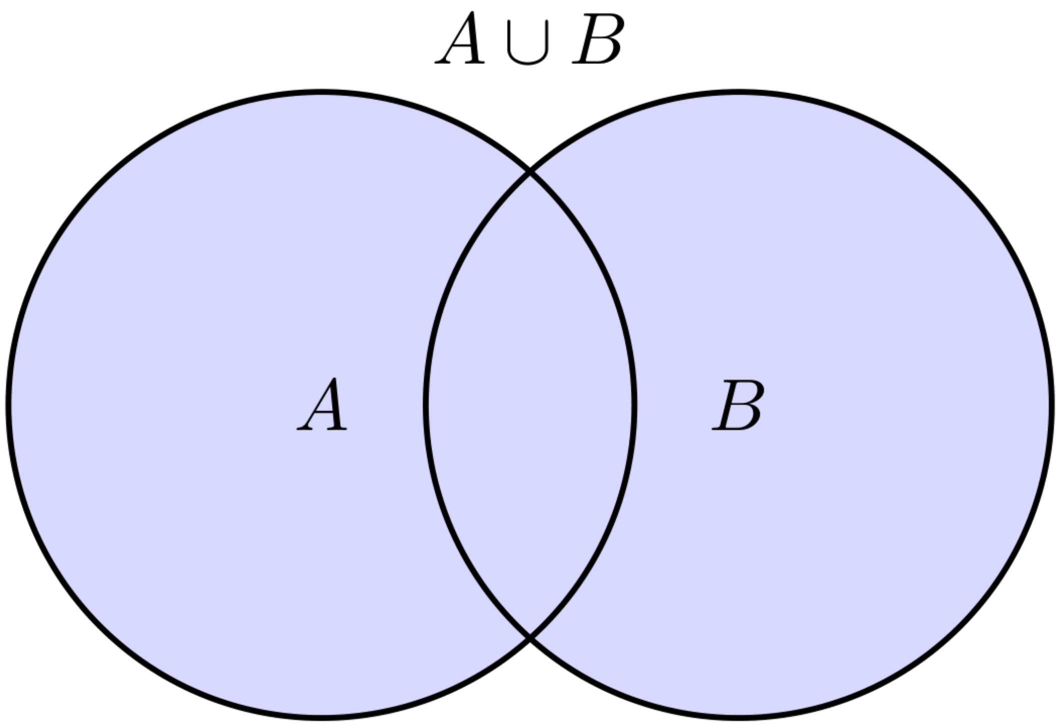
Koje su od slijedećih tvrdnji točne?

a) $3 \in \{1,2,3,4\}$	točno	g) $\emptyset \in \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$	točno
b) $3 \subset \{1,2,3,4\}$	netočno	h) $\emptyset \subset \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$	točno
c) $\{3\} \in \{1,2,3,4\}$	netočno	i) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$	netočno
d) $\{3\} \subset \{1,2,3,4\}$	točno	j) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$	točno
e) $\{3\} \in \{1,2,\{3\},4\}$	točno	k) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$	netočno
f) $\{3\} \in \{1,\{2,\{3\}\},4\}$	netočno		

Unija skupova

Uniju skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente iz ta dva skupa.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\} \\ &= \{x :\ (x \in A) \lor (x \in B)\} \end{aligned}$$

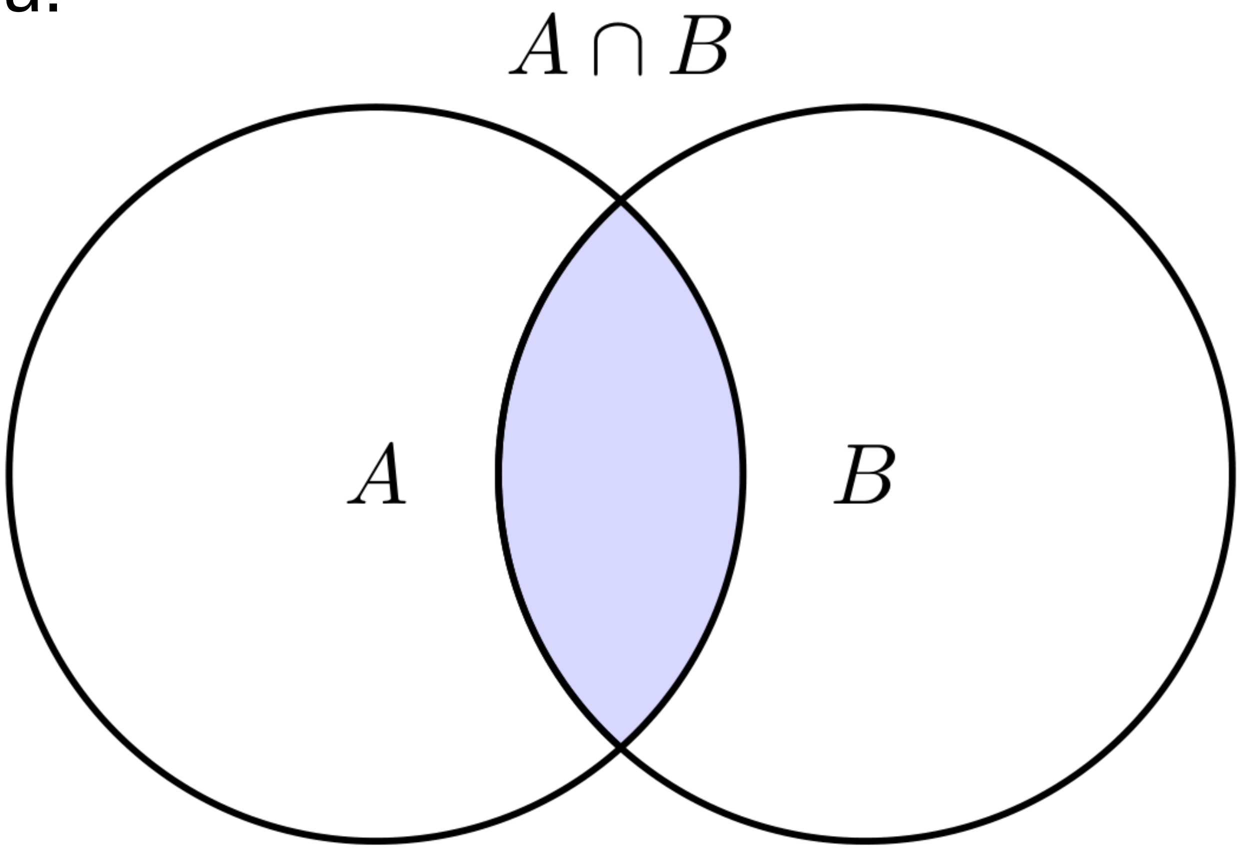


Unija skupova je komutativna operacija:

$$A \cup B = B \cup A$$

Presjek skupova

Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u jednom i u drugom skupu.



$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{x : x \in A \text{ i } x \in B\} \\
&= \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}
\end{aligned}
$$

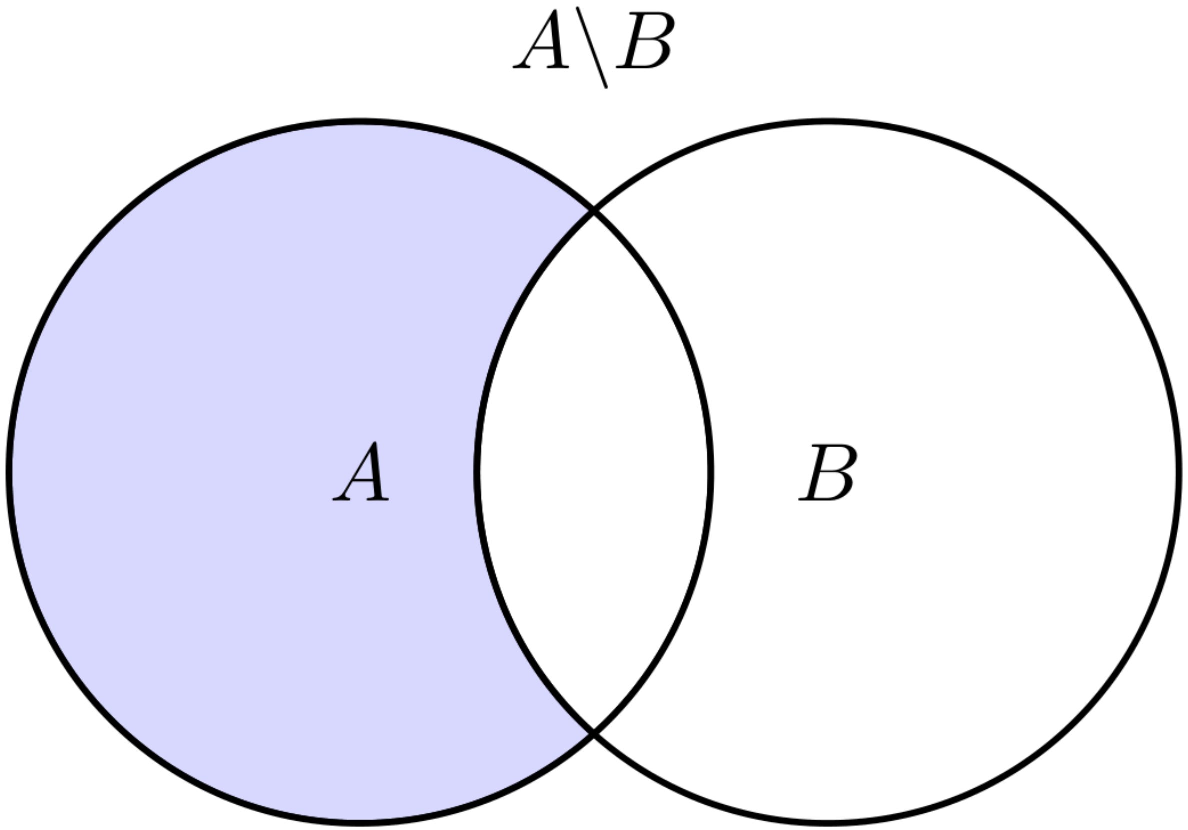
Presjek skupova je komutativna operacija:

$$A \cap B = B \cap A$$

Razlika skupova

Razlika skupova $A \backslash B$ je skup koji sadrži sve elemente iz skupa A osim onih koji su i u skupu B.

$$
\begin{aligned}
A \backslash B &= \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\} \\
&= \{x : (x \in A) \land (x \notin B)\}
\end{aligned}
$$



Razlika skupova **nije** komutativna operacija:

$$A \backslash B \neq B \backslash A$$

Komplement skupa

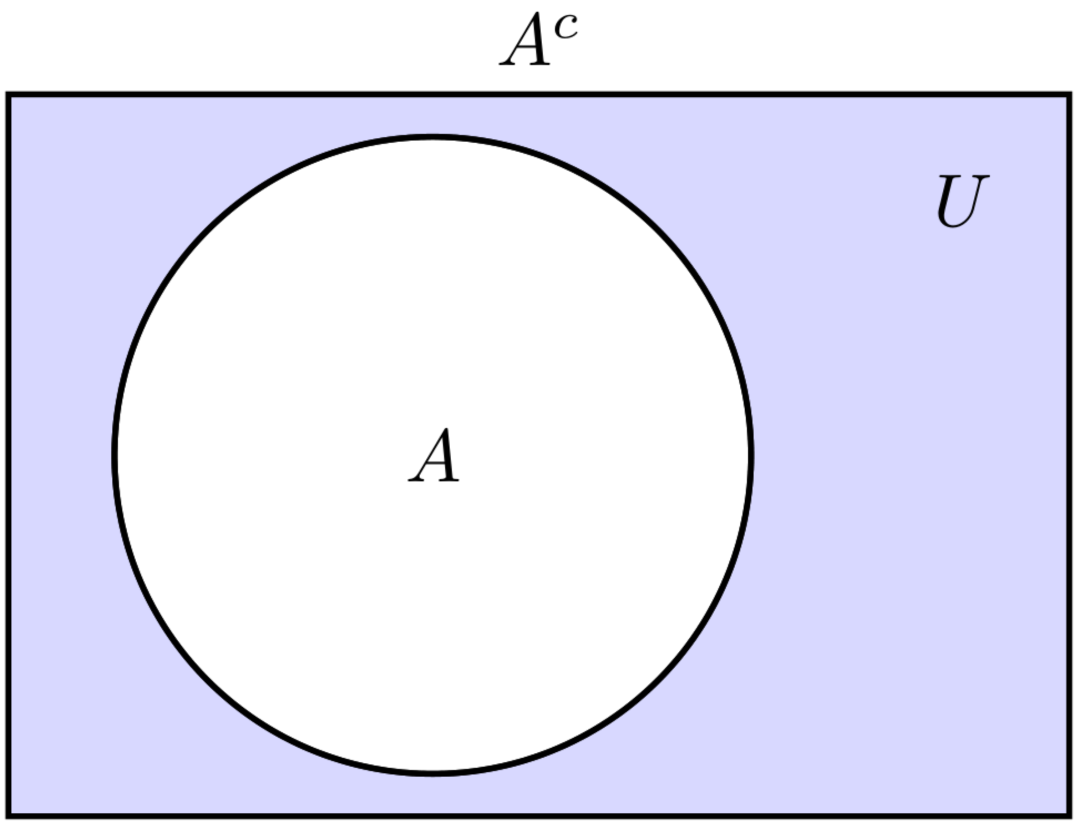
Komplement skupa A je skup koji sadrže sve elemente iz nekog univerzuma U osim onih koji su u skupu A.

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

Komplement je *unarna* operacija – odnosi se na jedan skup.

$$(A^c)^c = A$$

Komplement ovisi o *kontekstu* u kojemu promatramo neki skup.



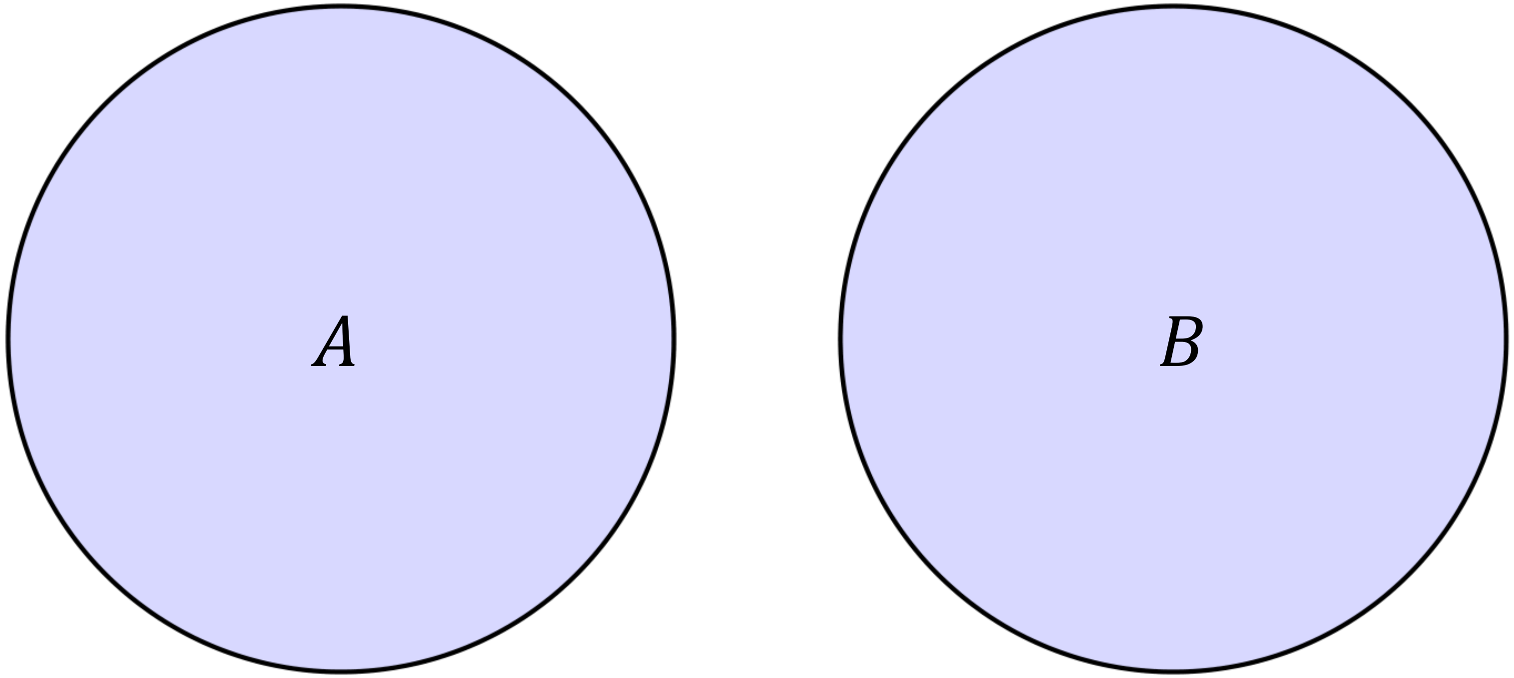
Disjunktni skupovi

Disjunktni skupovi nemaju zajedničkih elemenata.

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \setminus B = A$$

$$B \setminus A = B$$



Skupovi

Zadan je neprazan univerzum S i njegovi pravi podskupovi A i B.
Odredite čemu je jednako:

a) $A \cup \emptyset = A$

b) $A \cap \emptyset = \emptyset$

c) $A \cup A^c = S$

d) $A \cap A^c = \emptyset$

e) $A \setminus \emptyset = A$

f) $A \setminus A^c = A$

g) $\emptyset \setminus A = \emptyset$

h) $A \cup S = S$

i) $A \cap S = A$

j) $S \setminus A = A^c$

k) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

l) $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

Skupovni zapis De Morganovih pravila

Kardinalni broj

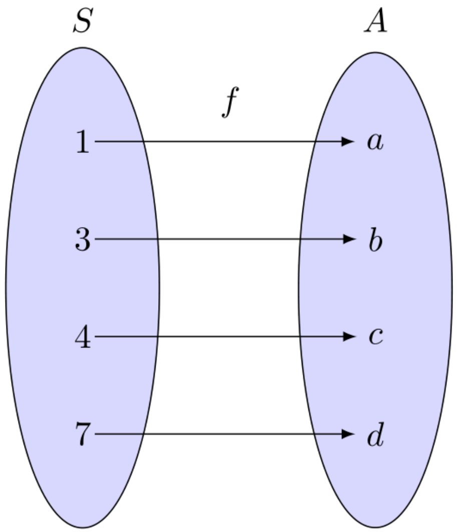
Kardinalni broj skupa S je broj elemenata tog skupa.

Označavamo ga s $|S|$ ili $card(S)$.

Odredite kardinalni broj slijedećih skupova:

a) $S = \{1, 3, 4, 7\}$ $|S| = 4$

b) $A = \{a, b, c, d\}$ $|S| = 4$



Skupovi su jednakog kardinaliteta (imaju isti broj elemenata) ako i samo ako između ta dva skupa postoji bijekcija.

Kardinalni broj

Odredite kardinalni broj slijedećih skupova:

c) $S = \{1, \{2, 3\}, 4\}$ $\qquad |S| = 3$

d) $\mathrm{A} = \{a, a, \{a\}\}$ $\qquad |S| = 2$

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| = \infty \ ?$$

e) $\mathbb{N}$ $\qquad$ f) $\mathbb{Z}$ $\qquad$ g) $\mathbb{Q}$ $\qquad$ h) $\mathbb{R}$

prebrojiva beskonačnost, $\aleph_0$ $\qquad$ neprebrojiva beskonačnost, c, $\aleph_1$

Partitivni skup

Partitivni skup skupa S je skup svih njegovih podskupova, $\mathcal{P}(S)$.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Uočimo: $|A| = 2$, $|\mathcal{P}(A)| = 4$.

$$|S| = n$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^n$$

Odredite partitivni skup skupa $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_3) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0, 1, 2\}\}$

Uočimo: $|\mathbb{Z}_3| = 3$, $|\mathcal{P}(\mathbb{Z}_3)| = 8$.

Kartezijev produkt skupova

Kada množimo dva izraza u zagradama, svaki element iz prve zagrade množimo sa svakim elementom iz druge zagrade.

Slično, kod Kartezijevog produkta skupova, formiramo uređene parove, gdje spajamo svaki elemente iz prvog skupa sa svakim elementom iz drugog skupa.

Kartezijev produkt skupova A i B je skup $A \times B$ oblika:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Kartezijev produkt skupova

Formirajte Kartezijev produkt skupova $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1,2\}$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

Uočimo: $|A| = 3,\ |B| = 2,\ \ |A \times B| = 6$

Općenito: $|A| = n,\ |B| = m,\ \ |A \times B| = n \cdot m$

Poredak je važan! $(2, a) \notin A \times B$

Hvala ☺