

Kombinacije

Neka je dan skup od n različitih elemenata. Svaki podskup od k različitih elemenata naziva se **kombinacija**. Drugim riječima, govorimo o načinima na koje možemo odabrati k elemenata iz skupa od n elemenata, pri čemu **redosljed odabranih elemenata nije bitan**.

Broj ovakvih kombinacija (tj. broj podskupova veličine k ili možemo reći broj načina za odabrati k elemenata) jednak je

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ovaj se broj označava $\binom{n}{k}$ te se zove binomni koeficijent (izgovaramo 'n povrh k').

Neka svojstva: 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ -> koristimo ovo svojstvo kad je donji broj veći od polovice gornjeg, tj. kada vrijedi $k > \frac{n}{2}$

$$2) \binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1$$

$$3) \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n-1} = n.$$

32. Ispišite sve dvočlane podskupove skupa koji se sastoji od jedne crvene, jedne bijele, jedne plave i jedne žute kuglice.

$$\{1c, 1b, 1p, 1z\}$$

Takvih kombinacija, tj. dvočlanih podskupova ima $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$

To su: $\{c, b\}, \{b, p\}, \{p, z\}$
 $\{c, p\}, \{b, z\}$
 $\{c, z\}$

ili brže

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$$

*) Imali smo ranije: ispiši sve uizove duljine 2
 varijacije

$$\text{ima ih: } \underline{4 \cdot 3} = 12$$

To su: $cb \quad bc \quad bp \quad pb \quad pz \quad zp$
 $cp \quad pc \quad bz \quad zb$
 $c\bar{z} \quad \bar{z}c$

33. Koliko ima:

- a) tročlanih podskupova skupa od 8 elemenata,
 b) peteročlanih podskupova skupa od 7 elemenata?

$$a) \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$\left. \begin{aligned} \binom{8}{3} &= \frac{8!}{3! \cdot 5!} \end{aligned} \right\}$$

$$b) \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6^3}{2!} = 21$$

Neka svojstva: 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ -> koristimo ovo svojstvo kad je donji broj veći od polovice gornjeg, tj. kada vrijedi $k > \frac{n}{2}$

34. U Hrvatskoj postoje dva loto: Loto 6 od 45 i Loto 7 od 39. Koje loto se više isplati igrati?

$$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8\ 145\ 060$$

$$\binom{39}{7} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dots = 15\ 380\ 937$$

kalkulator:
45 nCr 6

manje kombinacije znači veća šansa za pogoditi

36. Izbornik nogometne reprezentacije mora od 22 nogometaša izabrati njih 11, ali za petoricu svojih favorita već je odlučio. Na koliko načina može izbornik izabrati momčad?

$$\binom{22-5}{11-5} = \binom{17}{6} = \dots = 12\ 376$$

37. Na šahovskom turniru svaki je igrač odigrao sa svakim od preostalih jednu partiju. Ukupno je odigrano 78 partija. Koliko je šahista sudjelovalo u turniru?

n - broj šahista = ?

$$\binom{n}{2} = 78$$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} = 78 \quad | \cdot 2$$

$$n^2 - n - 156 = 0$$

$a=1$
 $b=-1$
 $c=-156$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 624}}{2}$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 25}{2} \quad \left\{ \begin{aligned} n_1 &= 13 \\ n_2 &= -12 \end{aligned} \right.$$

$$2 \cdot 1 \quad 1$$

$$1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \cancel{n_2 = 12}$$

$$n(n-1) = 156$$

38. Koliko se hokejaških postava može napraviti od igrača ekipe koja ima 9 napadača, 5 braniča i 3 vratara, ako postavu čine 1 vratar, 2 braniča i 3 napadača?

$$1v \quad \textcircled{I} \quad 2b \quad \textcircled{I} \quad 3n$$
$$\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{9}{3} = \cancel{3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{\cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 2520$$

39. U kutiji se nalazi 10 proizvoda, među kojima su 3 neispravna. Na koliko načina možemo odabrati 4 proizvoda iz kutije tako da među njima bude:

- a) točno jedan neispravan,
- b) barem jedan neispravan,
- c) najviše dva neispravna?

$$\boxed{3n, 7i} \xrightarrow{10} \text{biramo } 4$$

a) $1n \overset{\text{biramo } 4}{\textcircled{i}} 3i$

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 105$$

b) barem 1 neispr. = $1n \textcircled{i} 3i$ | $1|1$ $2n \textcircled{i} 2i$ | $1|1$ $3n \textcircled{i} 1i$

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} + \binom{3}{2} \cdot \binom{7}{2} + \binom{3}{3} \cdot \binom{7}{1}$$
$$= 105 + \binom{3}{1} \cdot 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} + 1 \cdot 7$$
$$= 175$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

2. način

PRAVILO KOMPLEMENTA ^{suprotan}

barem 1 neispr. = sve kombinacije — niti jedan neispravan

$$\text{barem 1} = S_{ni} - \text{niko jedan}$$

$$= \binom{10}{4} - \binom{0n}{3} \cdot \binom{4i}{1}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$= 175$$

c) najviše 2 neispravn = 0n 4i ili 1n 3i ili 2n 2i
(2 ili manje)

$$= \binom{7}{4} + \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} + \binom{3}{2} \cdot \binom{7}{2}$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}$$

$$= 203$$

brži način = PRAVILO KOMPLEMENTA

3 ili više

najviše 2 neisp. = $S_{ni} - 3\text{neisp.}$
(2 ili manje)

$$= \binom{10}{4} - \binom{3n}{3} \cdot \binom{4i}{1} = 7$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$= 203$$

40. Na koliko načina možemo iz snopa od 52 karte odabrati 5 tako da:

- dobijemo sve karte iste boje,
- dobijemo par (tačno dvije karte iste vrijednosti)
- dobijemo tris (tačno tri karte iste vrijednosti)
- dobijemo poker (tačno četiri karte iste vrijednosti)
- dobijemo ful (tri karte iste vrijednosti i dvije iste druge vrijednosti)
- dobijemo dva para (dvije karte iste vrijednosti, dvije iste druge vrijednosti i jedna karta različite vrijednosti od ostalih)?

52 karte \Rightarrow 13 vrijednosti : 2, 3, 4, ..., 10, dečko, dama, kralj, As $(13 \cdot 4 = 52)$

4 boje : kerc, pik, karo, tref $(4 \cdot 13 = 52)$

52 \rightarrow biramo 5

$$a) \quad 5H \quad 1L1 \quad 5P \quad 1L1 \quad 5K \quad 1L1 \quad 5T$$

$$\binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} = 4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$$

b) točno 2 iste vrijednosti i ostale 3 karte su različite od njih te međusobno različite vrijednosti

* na koliko načine mogu odabrati 5 karata različite vrijednosti iz snopa od 52 karte?

bez vrijednosti na 1. mjestu (svake vrijednosti imam po 4)

$$\frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{5!} \rightarrow \text{ovdje presojani i su poretki}$$

$K \heartsuit D \heartsuit A \heartsuit 2 \heartsuit 3 \heartsuit$
 $3 \heartsuit D \heartsuit K \heartsuit A \heartsuit 2 \heartsuit$

dijelimo s 5!
 da izuzmemo sve permutacije, na taj način svaku permutaciju smo presojali jednom

5 elemente mogu poredati na 5! način

biram vrijednost unutar nje biram 2 karte 3. karte različite vrijednosti od pre 2
 4. karte opet različita od 3.

$$13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = 1098240$$

b) dobijemo tris (točno tri karte iste vrijednosti)
 4. i 5.

$$13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{48 \cdot 44}{2!} = 54912$$

d) dobijemo poker (točno četiri karte iste vrijednosti)
 5.

$$13 \cdot \binom{4}{4} \cdot 48 = 624$$

e) dobijemo ful (tri karte iste vrijednosti i dvije iste druge vrijednosti)
 broj načina da nabavi 2. vrijednost

$$13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 1248$$

f) dobijemo dva para (dvije karte iste vrijednosti, dvije iste druge vrijednosti i jedna karta različite vrijednosti od ostalih)?

$\{a, s, c, d\}$

nit dužine 2 bez
ponavljanja
 $\frac{4 \cdot 3}{}$
ab
ba

$$\frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 44}{2!} = 134784$$

↑ bez prvih 4 i bez drugih 4

aa bb
bb aa

66. Koliko ima nizova duljine 8 koji:

- a) se sastoje od znamenaka 0 i 1,
- b) sadrže točno 5 nula i 3 jedinice,
- c) sadrže barem 6 nula a ostalo su jedinice,
- d) sadrže najviše 2 jedinice?

a) $\underbrace{2}_{\{0,1\}} \cdot \underbrace{2}_{\{0,1\}} \cdot \underbrace{2}_{\{0,1\}} \cdot \dots \cdot \underbrace{2}_{\{0,1\}} = 2^8 = 256$

1. kolika je duljina niza?
2. koliko opција za svako mjesto?

b) $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

permutacije s ponavljanjem

$\left. \begin{array}{l} |C| \\ \binom{8}{5} = 56 \end{array} \right\}$

c) sadrže barem 6 nula a ostalo su jedinice,

barem 6 nula = 6 nula i 2 jedinice ili 7 nula i 1 jedinice ili 8 nula
6 ili više

$$= \frac{8!}{6! \cdot 2!} + \frac{8!}{7! \cdot 1!} + 1$$

2. način = $\binom{8}{6} + \binom{8}{7} + 1$ (ostalo su nule)

d) sadrže najviše 2 jedinice?

najviše 2 jed. = 2 jedinice i 6 nula |C| 1 jedinice i 7 nula |C| 0 jedinica i 8 nula
(2 ili manje) = isto kao c)