Vježbe 5

30. listopada 2024. 8:02

9. Izračunajte vjerojatnosti događaja A i B iz zadatka 2. ako loši proizvodi silaze s proizvodne trake s dvostruko manjom vjerojatnošću nego dobri.

prostor elementarnih događaja (skup) $\Omega = \{LL, DLL, DDLL, DLDL, DDDD, LDLD, LDDD, DLDD, DDLD, DDDL, LDDL, LDLL\}$

a) $A = \{\overset{\omega_1}{LDDD}, \overset{\omega_2}{DLDD}, \overset{\omega_3}{DDLD}, \overset{\omega_4}{DDDL}, \overset{\omega_5}{DDDD}\}$

b) unutar prva tri (NE u trećem)

$B = \{\underset{\omega_6}{LL}, \underset{\omega_7}{DLL}\}$

$$\begin{cases} p_L = \dfrac{p_D}{2} \\ p_L + p_D = 1 \quad {}^{= 100\%} \end{cases}$$

$\frac{p_D}{2} + p_D = 1 \quad / \cdot 2$

$p_D + 2p_D = 2$

$3p_D = 2 \quad / : 3$

$p_D = \frac{2}{3}$

$p_L = \frac{p_D}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{2}{6}$

$p_L = \frac{1}{3}$

$\omega_1 = LDDD$

$p_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$

$\omega_2 = DLDD$

$p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$

$p_3 = p_4 = \frac{8}{81}$

DDDD $p_5 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

$P(A) = \underbrace{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} + p_5$

$P(A) = 4 \cdot \frac{8}{81} + \frac{16}{81}$

$P(A) = \cancel{\frac{48}{81}} = \frac{16}{27}$ //

za B: $\omega_6 = LL$ $\quad \omega_7 = DLL$

$p_6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ $\quad \omega_7 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

$P(B) = p_6 + p_7 = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}$ //

Klasični vjerojatnosni prostor

Klasični vjerojatnosni prostor je konačni vjerojatnosni prostor u kojem je **svaki ishod (elementarni događaj) jednako vjerojatan.**

Tada vjerojatnost događaja A računamo po formuli:

$$\boxed{P(A) = \frac{\textbf{\textit{broj POVOLJNIH ishoda (iz A)}}}{\textbf{\textit{broj MOGUĆIH ishoda (iz }}\Omega)}} = \frac{M}{N} \quad !!$$

Klasični vjerojatnosni prostor još prepoznajemo po tome kad kažemo da nešto radimo nasumično ili na slučajan način. Te riječi ukazuju da je svaki ishod pojave jednako vjerojatan.

12. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani broj od 1 do 12 djelitelj broja 12?

mogući $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ broj mogućih $= N = 12$

povoljni $A = \{\text{djelitelj od } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ broj povoljnih $= M = 6$

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

13. Znamenke 1, 2, ..., 9 zapisane su u slučajnom poretku. Izračunaj vjerojatnost da se znamenka 2 pojavi neposredno nakon znamenke 1.

$\Omega \to 1, 2, \dots, 9$ u različitim poretcima $\to$ broj mogućih $= N = 9!$

n elemenata se može rasporediti na $n!$ načina.
različitih

$A = \{2 \text{ iza } 1\} \to$ broj povoljnih $= M = 8!$

$\boxed{12}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \to$ ukupno ih je 8

spoji u blok, tj. u 1 element

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{8!}{9!} = \frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 9} = \frac{1}{9}$$

$1 \cdot 2 \cdots 8 \cdot 9$

14. Bacamo dvije simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost događaja:

a) A – {zbroj brojeva na kockama je 7 ili 11},
b) B – {pala je barem jedna šestica},
c) C – {produkt brojeva na kockama je neparan},
d) D – {jedan broj na kocki dijeli drugi}?

2 kocke $\to \Omega \to$ broj mogućih $N = \underset{1.}{6} \cdot \underset{2.\text{ kocka}}{6} = 36$

a) $A = \{\text{zbroj } 7 \text{ ili } 11\} = \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 56, 65\}$ $\to$ broj povoljnih $M_A = 8$

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

a) $A = \{$zbroj 7 ili 11$\} = \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 56, 65\}$ broj povoljnih $M_A = 8$

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

b) $B = \{$barem 1 šestica$\} = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 65, 64, 63, 62, 61\}$ → broj povoljnih $M_B = 11$

$$P(B) = \frac{M_B}{N} = \frac{11}{36}$$

ili barem 1 šest. = svi − niti jedne šest.

$$= 36 - \frac{5}{\cancel{6}} \cdot \frac{5}{\cancel{6}} = 11$$

c) $C = \{\underbrace{\text{produkt neparan}}_{\text{oba neparna}}\}$ ⇒ broj povoljnih $M_C = \underset{\{1,3,5\}}{3} \cdot 3 = 9$

$$P(C) = \frac{M_C}{N} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

d) $D = \{$1 dijeli drugi broj$\}$ $\qquad 6 : 2 = 3$ → 2 dijeli 6

$D = \{11, 12, 13, 14, 15, 16,$
$21, 22, 24, 26,$
$31, 33, 36,$
$41, 42, 44,$
$51, 55,$
$61, 62, 63, 66\}$

broj povoljnih $M_D = 22$

$$P(D) = \frac{M_D}{N} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

15. Simetrični novčić se baca 4 puta. Kolika je vjerojatnost događaja:
   a) A – {pojavilo se točno jedno pismo},
   b) B – {u drugom bacanju pojavilo se pismo},
   c) C – {pojavilo se barem jedno pismo},
   d) D – {pismo se pojavilo barem dva puta}?

novčić 4 puta → Ω → broj mogućih $N = \underset{\{P,G\}}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

a) $A = \{PGGG, GPGG, GGPG, GGGP\}$ broj povoljnih $M_A = 4$

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

2. način biram 1 od 4 mjesta to mogu na $\binom{4}{1}$ načina

b) $B = \{P$ u 2. bacanju$\}$ ⇒ broj povoljnih $M_B = \underset{\{P,G\}}{2} \cdot \underset{\{P\}}{1} \cdot \underset{\{P,G\}}{2} \cdot 2 = 8$

$$P(B) = \frac{M_B}{N} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

c) $C = \{$barem 1 pismo$\}$ ⇒ broj povoljnih $\overset{\text{barem jedno}}{M_C} =$ svi − niti jedno $^{= GGGG}$

c) $C = \{\underline{\text{barem}}\ 1\ \text{Pismo}\}$ ⇒ broj povoljnih $M_C = \underset{\text{barem jedno}}{\text{svi}} - \text{niti jedno}$ // GGGG

$= 16 - 1$

$= 15$

$$P(C) = \frac{M_C}{N} = \frac{15}{16}$$

2. način

$$\underset{\text{barem 1}}{P(C)} = 1 - \underset{\text{niti jedan}}{P(\overline{C})} \qquad P(\overline{C}) = \frac{M}{N} = \frac{1 \to \text{povoljan}}{16 \to \text{mogućih}}$$

$= 1 - \frac{1}{16}$

$= \frac{15}{16}$

d) $D = \{P\ \text{barem 2 puta}\}$ broj povoljnih $M_D = \text{svi} - \text{točno } 1 - \text{niti } 1$ // GGGG

$= 16 - \underset{a)}{4} - 1$

$= 11$

$$P(D) = \frac{M_D}{N} = \frac{11}{16}$$

16. 6 bijelih, 4 crne i 2 plave kuglice redaju se na sreću. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije biti bijele?

6 b, 4c, 2p redaju se → Ω → broj mogućih $N = \dfrac{12!}{6!\cdot 4!\cdot 2!}$ (permutacije s ponavljanjem)

A = {prve dvije bijele}

↳ odvojimo 2 bijele i zamislimo da su uvijek na prvom mjestu, a ostale mižemo

OO ..... = M (koliko ovih poredaka)

imamo 4b, 4c, 2p

broj povoljnih $M = \dfrac{10!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}$

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{\dfrac{10!}{4!\cdot\cancel{4!}\cdot\cancel{2!}}}{\dfrac{12!}{6!\cdot\cancel{4!}\cdot\cancel{2!}}} = \frac{10!\cdot 6!}{4!\cdot 12!} = \frac{\cancel{10!}\cdot \overbrace{\cancel{4!}\cdot 5\cdot 6}^{1\cdots 4\cdot 5\cdot 6}}{\cancel{4!}\cdot \underbrace{\cancel{10!}\cdot 11\cdot \cancel{12}_2}_{1\cdots 10\cdot 11\cdot 12}} = \frac{5}{22}\ //$$

2. način $P(A) = \dfrac{6\ \text{povolj.}}{12\ \text{mogućih}} \cdot \dfrac{5\ \text{povolj.}}{11\ \text{mogućih}} = \dfrac{5}{22}$ (1. b i 2. b)

17. U kutiji imamo 6 žutih i 4 modre kuglice. Ako slučajno izvučemo dvije kuglice, kolika je vjerojatnost sljedećih događaja:

a) A – {obje kuglice su žute},
b) B – {kuglice su različitih boja},
c) C – {kuglice su iste boje}?

(biramo) izvlačimo kuglice → poredak odabranih nije bitan → $\binom{n}{k}$ kombinacije nije bitan $\rightarrow \binom{n}{k}$ kombinacije

$\Omega \rightarrow \boxed{6ž, 4m} \rightarrow$ 2 kuglice izvlačimo

na koliko načina izvući 2 od 10

broj mogućih $N = \binom{10}{2} = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot 9}{\cancel{2 \cdot 1}} = 45$

a) $A = \{$obje žute$\}$ broj povoljnih $M_A = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (2ž od 6)

$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

b) $B = \{$kuglice različitih boja$\}$

1ž (i) 1m (od 6, od 4)

$M_B = \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} = 24$

$P(B) = \frac{M_B}{N} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

c) $C = \{$kuglice iste boje$\}$

2ž ili 2m

$M_C = \binom{6}{2} + \binom{4}{2} = 15 + \frac{4 \cdot 3}{2} = 21$

$P(C) = \frac{M_C}{N} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

2. način $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{7}{15}$

18. Iz snopa od 52 karte izvlače se dvije. Kolika je vjerojatnost da će među njima biti:
   a) Dvije pik karte,
   b) Jedna pik i jedna herc karta,
   c) Dva asa,
   d) Najviše jedan as?

52 ↓ $\boxed{13H, 13P, 13K, 13T}$ → 4 boje

ili

52 ↓ $\boxed{4 \text{ dvojke}, 4 \text{ trojke}, 4 \text{ čet.}, \ldots, 4 \text{ kralja}, 4 \text{ asa}}$ → 13 vrijednosti

$\boxed{52 \text{ karte}} \rightarrow$ izvlačimo 2

→ broj mogućih $N = \binom{52}{2} = \frac{52 \cdot 51}{2}$

$N = 1326$

a) $A = \{2 \text{ pika}\}$ broj povolj. $M_A = \binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ (2 pika)

$P(A) = \frac{78}{1326}$

b) 1P (i) 1H

broj povoljnih $M_B = \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 169$ $P(B) = \frac{169}{1326}$

c) broj povoljnih $M_C = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (2 asa od 4) $P(C) = \frac{6}{1326}$

d) najviše 1 AS broj povoljnih

točno 1 as ili niti jedan

1 as (i) 1 ne-as ili 0 aseva (i) 2 ne-asa

$M \quad \binom{4}{1} \cdot \binom{48}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{48}{1} \ldots$

d) najviše 1 AS broj povoljnih

1as i 1ne-as ili 0aseva i 2ne-asa

$$M_D = \binom{4}{1}\cdot\binom{48}{1} + \binom{4}{0}\cdot\binom{48}{2} = 1320$$

$$P(D) = \frac{1320}{1326}$$

može i komplement ...

19. Kolika je vjerojatnost da se u igri LOTO 6 od 45 u jednoj kombinaciji postigne dobitak od 6, 5, 4 ili 3 pogotka?

biramo 6 od 45 brojeva

45

6 dobitnih, 39 nedobitnih

$\Omega \rightarrow$ broj mogućih $N = \binom{45}{6} = 8\ 145\ 060$

$A = \{$dobitak od 6 pogodaka$\}$ $\rightarrow$ broj povoljnih $M_A = \binom{6}{6} = 1$ 6d

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{1}{8\ 145\ 060}$$

$B = \{$dobitak od 5$\}$ $\rightarrow$ 5 dobitnih i 1 nedobitni $\rightarrow$ biramo 6

$$M_B = \binom{6}{5}\cdot\binom{39}{1}$$

$$M_B = 6\cdot 39 = 234$$

$$P(B) = \frac{234}{8\ 145\ 060}$$

$C = \{$4 dobitna$\}$ $\rightarrow$ 4 dob. i 2 nedobitna

$$M_C = \binom{6}{4}\cdot\binom{39}{2}$$

$$M_C = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{39\cdot 38}{2} = 11\ 115$$

$$P(C) = \frac{11\ 115}{8\ 145\ 060}$$

$D = \{$3 dobitna$\}$ $\rightarrow$ $M_D = \binom{6}{3}\cdot\binom{39}{3} = 182\ 780$

$$P(D) = \frac{182\ 780}{8\ 145\ 060}$$

ili

$$p = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \ldots$$

20. U šest kutija na slučajan način se raspoređuju 4 kuglice. Kolika je vjerojatnost da će u prve četiri kutije biti točno po jedna kuglica?

6 kutija, 4 kuglice $\rightarrow \Omega \rightarrow$ broj mogućih $N = \underset{1.}{6}\cdot\underset{2.}{6}\cdot\underset{3.}{6}\cdot\underset{4.\text{ kuglica}}{6} = 6^4$

prve četiri kutije po 1 kuglice $\rightarrow A \rightarrow$ broj povoljnih $M = \underset{1.}{\underline{4}} \cdot \underset{2.}{\underline{3}} \cdot \underset{3.}{\underline{2}} \cdot \underset{4.\ \text{kutija}}{\underline{1}} = 4!$

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{4!}{6^4} = \dots$$