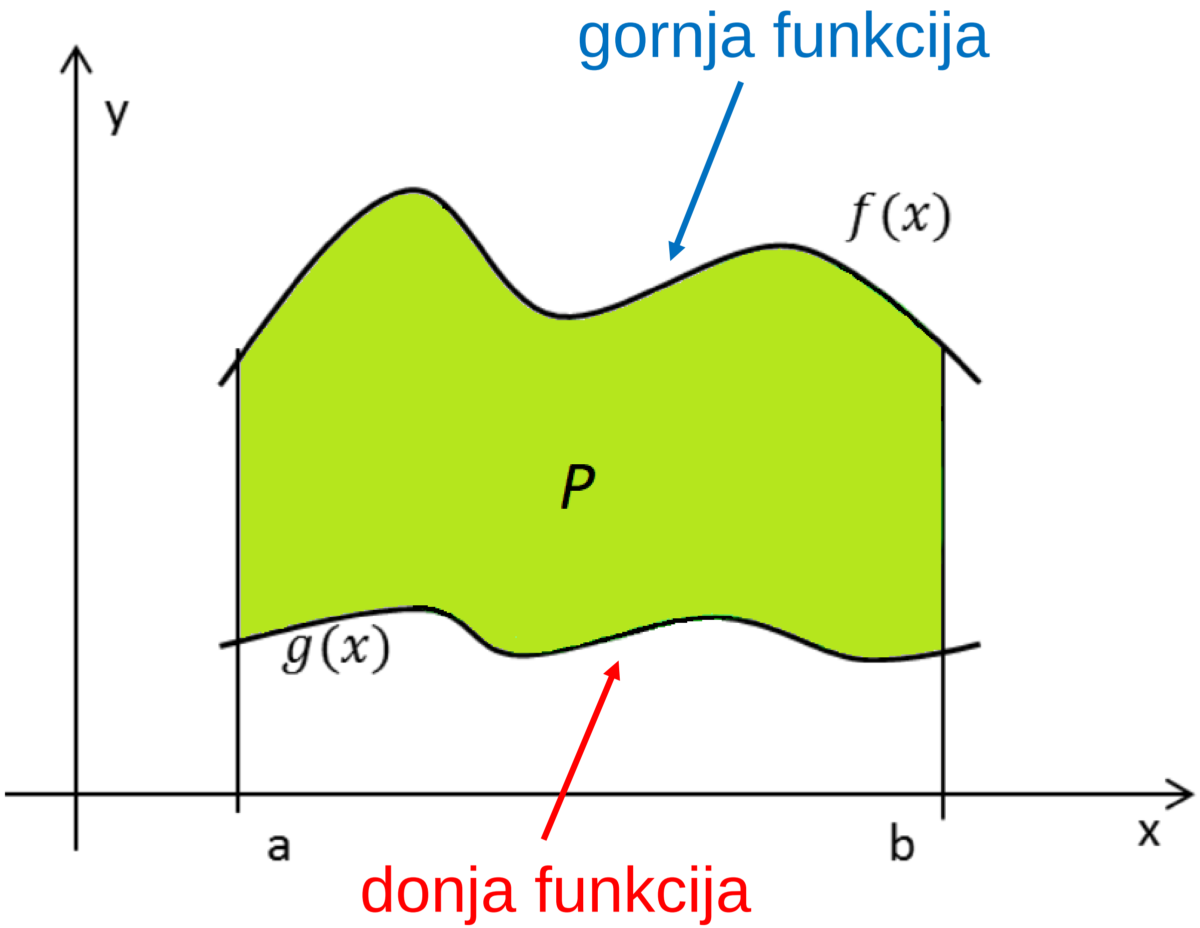
Matematička analiza

Ishod 4

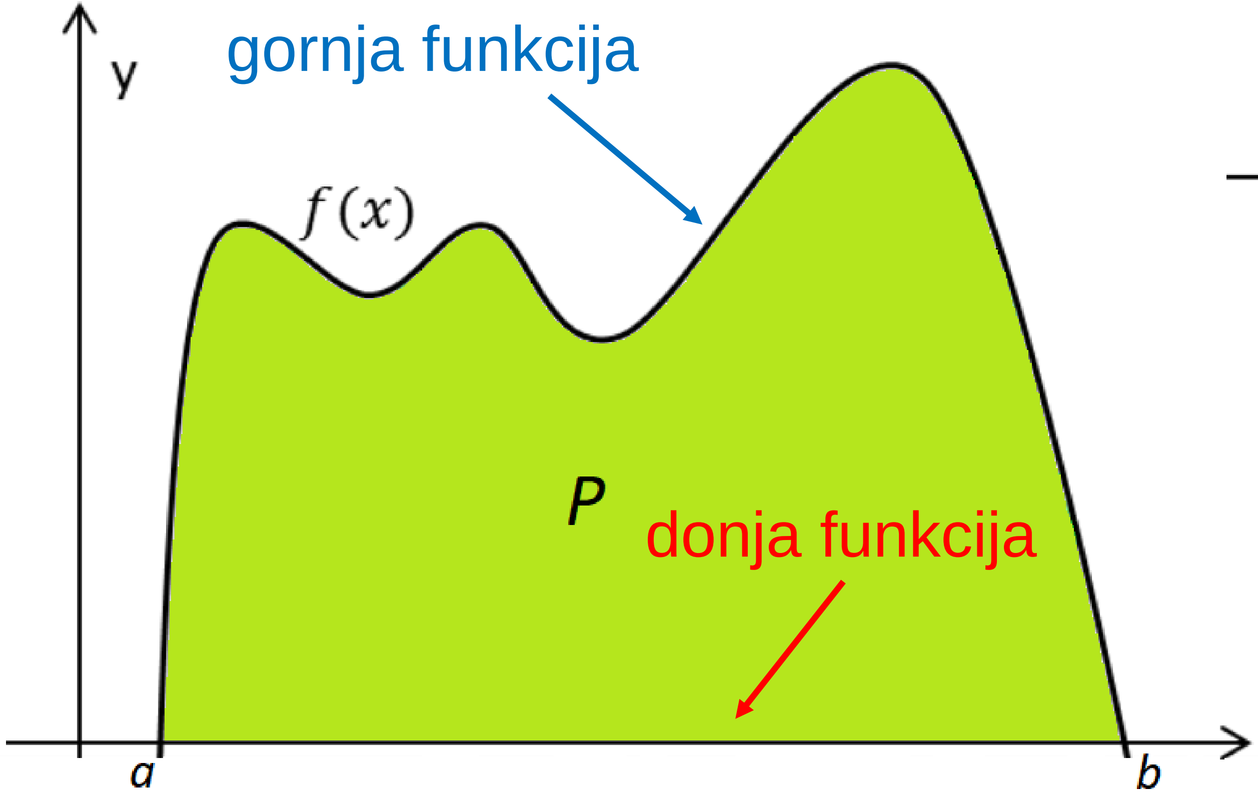
Površina omeđena krivuljama

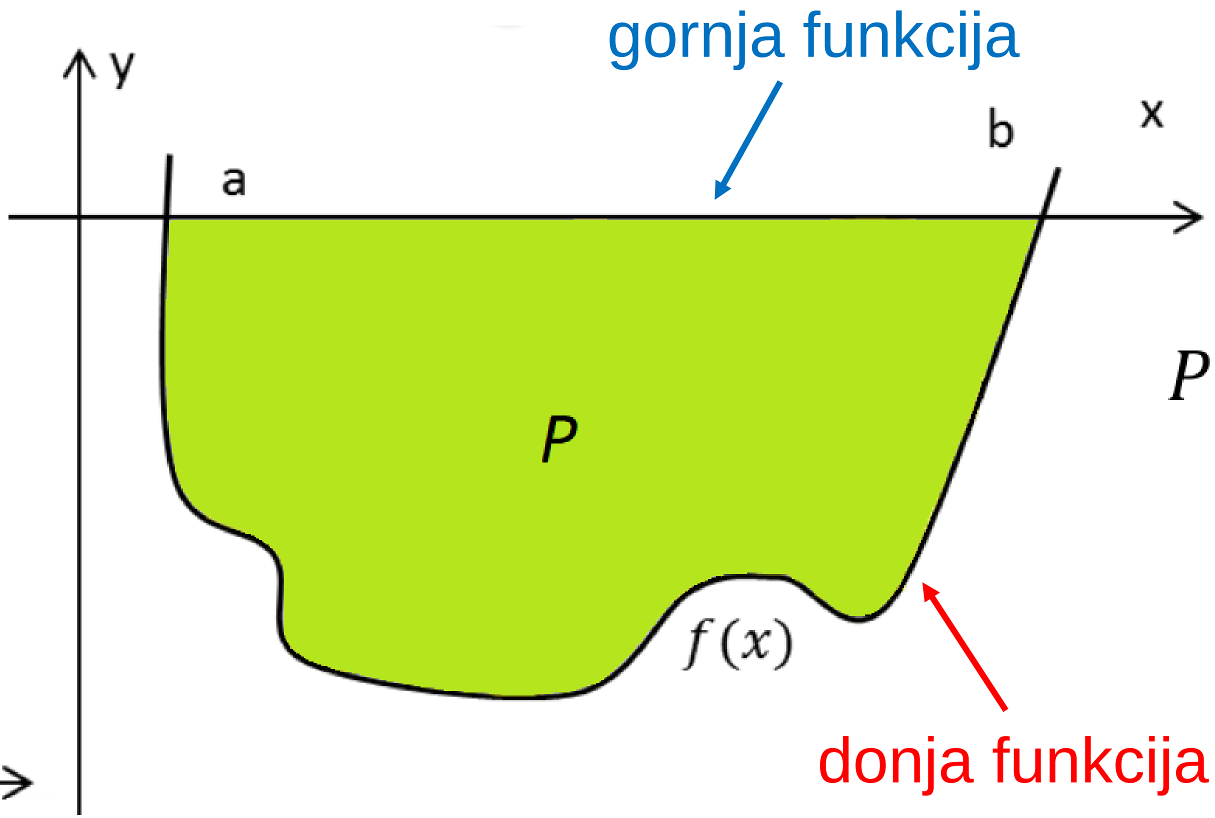


$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

gornja funkcija

donja funkcija

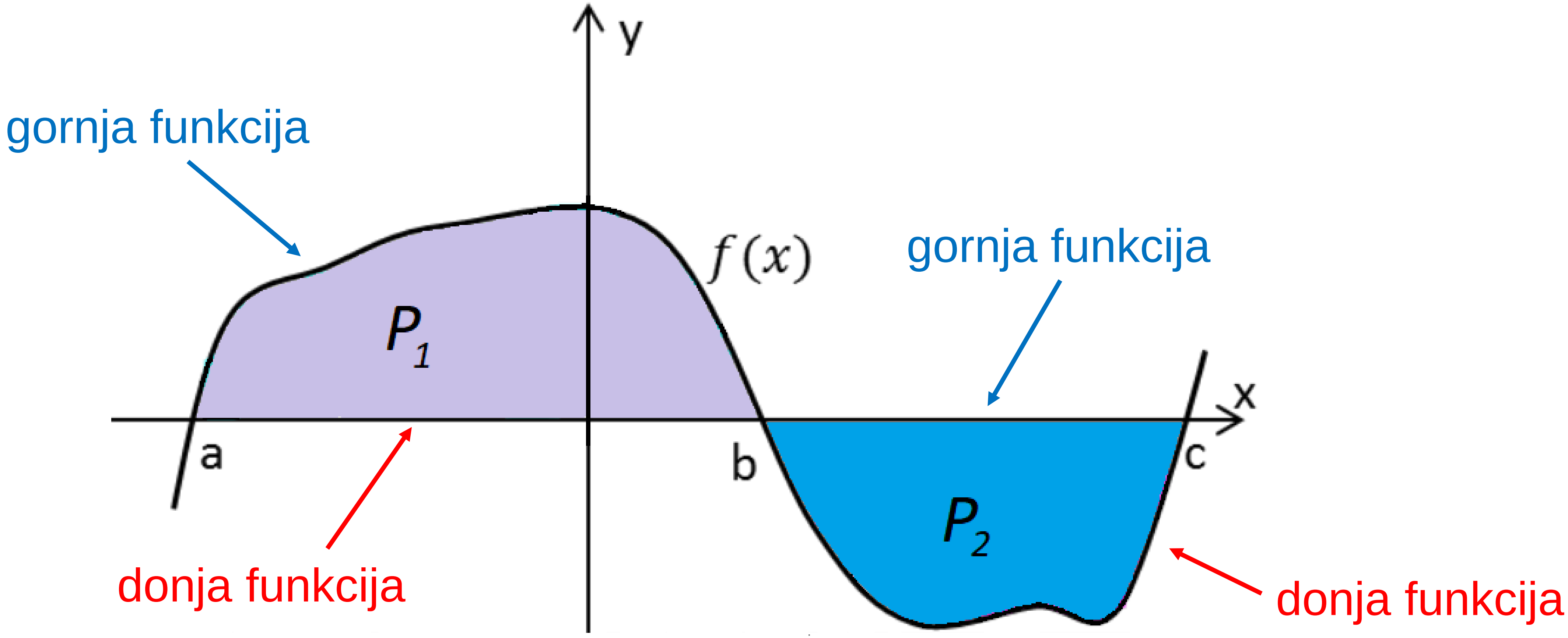




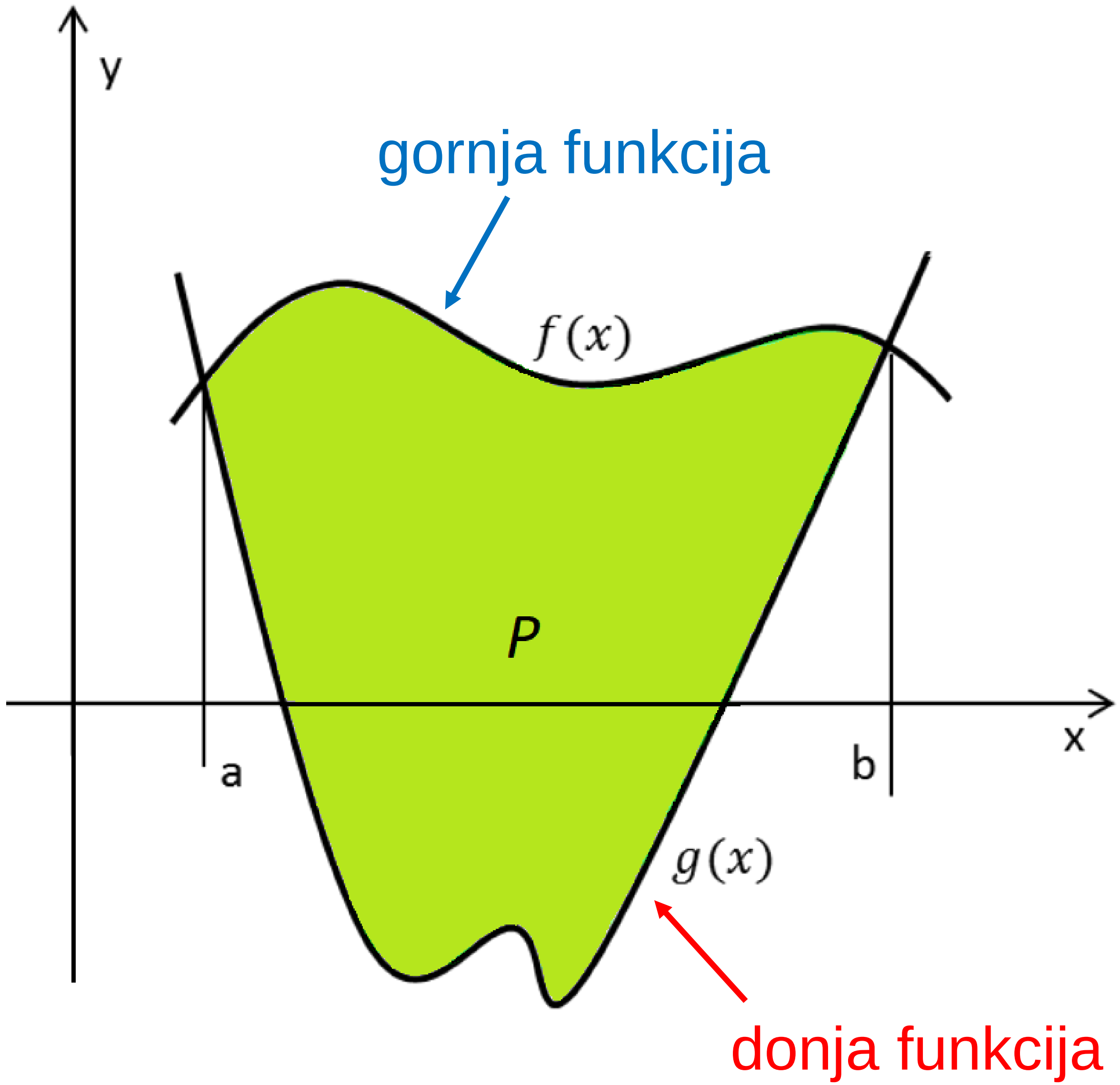
$P =$

$$P = \int_a^b (f(x) - 0)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$P = \int_a^b \big(0 - f(x)\big)dx = -\int_a^b f(x)dx$$



$$P = P_1 + P_2 = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c -f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx + \int_b^c |f(x)|dx$$



Granice integracije a i b su x-koordinate točaka presjeka krivulja, tj. rješenja jednadžbe:

$$f(x) = g(x)$$

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Pri određivanju površine, skica je obavezna!

Površina omeđena krivuljama

13.1. Odredite površinu lika omeđenog krivuljom $y = x^2 + 1$ i x-osi, između pravaca $x = -1$ i $x = 2$.

13.2. Odredite površinu između krivulje $y = -x^2 + 4x - 5$ i koordinatne osi x, te pravaca $x = 1$ i $x = 4$.

13.3. Odredite površinu između krivulje $y = x^2 - x - 6$ i koordinatne osi x, za $x \in [-5,3]$.

Površina omeđena krivuljama

13.4. Izračunajte površinu lika koji se nalazi između parabole $y = x^2 - 4x + 5$ i pravca $y = x + 1$.

13.5. Izračunajte površinu lika koji je omeđen parabolama $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$.

13.6. Odredite površinu lika u prvom kvadrantu, omeđenog krivuljama $y = \frac{4}{\pi^2}x^2$ i $y = \sin x$, ako su točke presjeka tih krivulja $A(0,0)$ i $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Površina omeđena krivuljama

13.7. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = -x^2$ i $y = e^x$, te pravcima $x = 0$ i $x = 1$.

13.8. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = \frac{1}{x}$ i pravcima $y = x$, $y = 0$ i $x = e$.

13.9. Odredite površinu lika u prvom kvadrantu, omeđe-nog krivuljom $y = \frac{1}{x^2}$ i pravcima $x = 2$ i $y = 4$.

Separabilne diferencijalne jednadžbe

Postupak rješavanja:

1. Umjesto y' pišemo $\frac{dy}{dx}$ i jednadžbu pomnožimo s dx.
2. Separiramo jednadžbu: x grupiramo uz dx, a y uz dy.
3. Integriramo jednadžbu (konstantu C pišemo samo na strani jednadžbe gdje se nalazi nepoznanica x).
4. Izrazimo y i zapišemo opće rješenje jednadžbe.
5. U opće rješenje uvrstimo početni uvjet i odredimo vrijednost nepoznate konstante C. Zapišemo partikularno rješenje jednadžbe.

Separabilne diferencijalne jednadžbe

14.1. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{2yy'}{x} = 1$, uz početni uvjet $y(0) = 0$.

14.2. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{xy'}{y} = 2$, uz početni uvjet $y(2) = 8$.

14.3. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{y'}{x\sqrt{y}} = 4$, uz početni uvjet $y(1) = 0$.

Separabilne diferencijalne jednadžbe

14.4. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{y'}{2xy} = 2$, uz početni uvjet $y(0) = -2$.

14.5. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{xy'}{2y+1} = 1$, uz početni uvjet $y(1) = \frac{3}{2}$.

14.6. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $-y' = y^2 \ln x$, uz početni uvjet $y(1) = \frac{1}{2}$.

Separabilne diferencijalne jednadžbe

14.7. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $x\sqrt{y}(3x+2)dx = dy$, uz početni uvjet $y(0) = 4$.

14.8. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $xydy = \ln x\, dx$, uz početni uvjet $y(e) = 2$.

14.9. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{e^x}{y} = \frac{2}{x}y'$, uz početni uvjet $y(1) = 2$.

Ekonomske funkcije

Za funkciju ukupnih troškova $T(Q)$ definiramo:

- funkciju prosječnih troškova $AT(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$
- funkciju graničnih troškova $MT(Q) = T'(Q)$

Fiksni troškovi su troškovi na razini $Q = 0$.

Za ekonomsku funkciju $f(x)$ definiramo koeficijent elastičnosti: $E_{f,x} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Ekonomske veličine (troškovi, količina, cijena…) ne mogu biti negativni.

Ekonomske funkcije

15.1. Odredite funkciju ukupnih troškova, ako su granični troškovi jednaki $MT(Q) = 40\sqrt[3]{Q} + 10$, dok su fiksni troškovi jednaki 100.

15.2. Fiksni troškovi proizvodnje nekog proizvoda jednaki su 100. Troškovi proizvodnje rastu u odnosu na proizvedenu količinu brzinom $MT(Q) = 2Q + 1$. Na kojoj razini proizvodnje će ukupni troškovi biti jednaki 210?

Ekonomske funkcije

15.3. Troškovi proizvodnje nekog proizvoda na razini $Q = 1$ jednaki su 100, a granični troškovi $MT(Q) = \frac{400}{Q^2}$. Na kojim razinama proizvodnje će prosječni troškovi biti jednaki 100?

15.4. Troškovi proizvodnje nekog proizvoda na razini $Q = 1$ jednaki su 20, a granični troškovi $MT(Q) = \frac{10}{Q}$. Rastu li ili padaju ukupni i prosječni troškovi na razini $Q = 10$?

Ekonomske funkcije

15.5. Koeficijent elastičnosti funkcije potražnje $q(p)$, u odnosu na cijenu proizvoda p, jednak je $E_{q,p} = \frac{p}{p+1}$. Odredite potražnju na razini cijena $p = 9$, ako na razini cijena $p = 2$ vrijedi $q(2) = 9$.

15.6. Koeficijent elastičnosti funkcije prihoda $r(q)$, u odnosu na količinu q, jednak je $E_{r,q} = \frac{1}{3}$. Odredite prihode na razini $q = 27$, ako na razini $q = 1$ vrijedi $r(1) = 100$.

Ekonomske funkcije

15.7. Koeficijent elastičnosti funkcije $y(x)$ jednak je $E_{y,x} = \frac{1}{\ln x}$. Odredite funkciju $y(x)$ ako je $y(e) = 10$.

15.8. Koeficijent elastičnosti funkcije $y(x)$ jednak je $E_{y,x} = x \ln x$. Odredite funkciju $y(x)$ ako je $y(1) = \frac{1}{e}$.

Hvala ☺