MATEMATIKA

Funkcije

Funkcije

Knjiga „*Matematika za IT*"

- Poglavlje „Funkcije", str. 103. – 122.

Definicija funkcija

Funkcija je uređena trojka (D, K, f) gdje su D i K skupovi, a f pravilo kojim se svakom $x \in D$ pridružuje **točno jedan** $y \in K$ tako da vrijedi $f(x) = y$.

Funkcija f je **jednoznačno** preslikavanje sa skupa D na skup K.

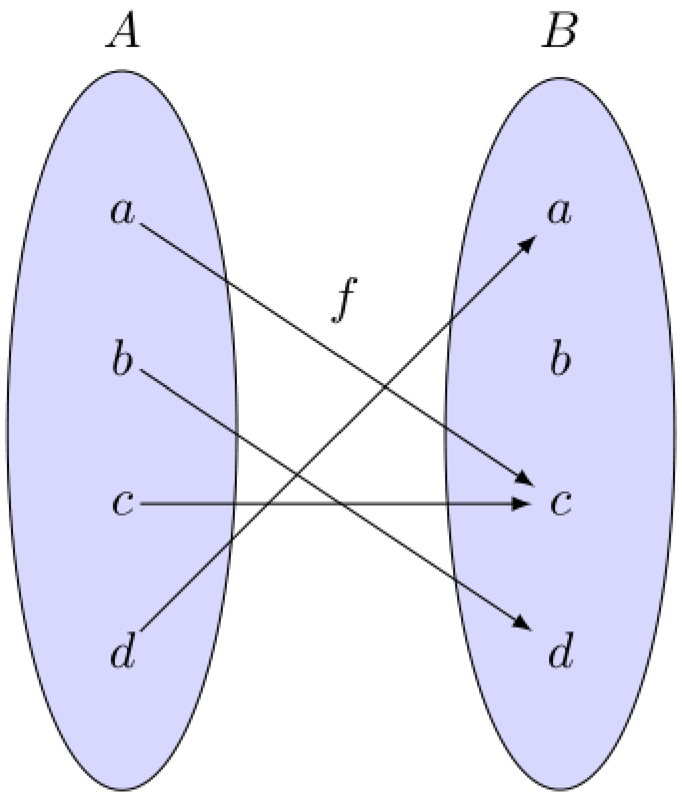
Funkciju zapisujemo: $f: D \to K$

Skup D zovemo domenom funkcije f.

Skup K zovemo kodomenom funkcije f.

Definicija funkcija

Grafički, kod konačnog broja elemenata skupova, funkciju možemo prikazati dijagramom:

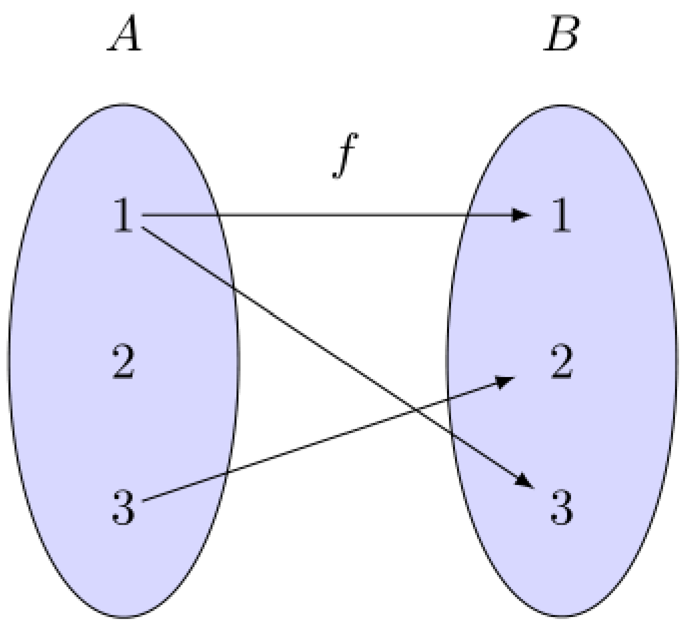


Ovim dijagramom je prikazana funkcija $f: A \to B$ za koju vrijedi:

$$f(a) = c$$
$$f(b) = d$$
$$f(c) = c$$
$$f(d) = a$$

Definicija funkcija

Je li slijedećim dijagramom prikazana funkcija?



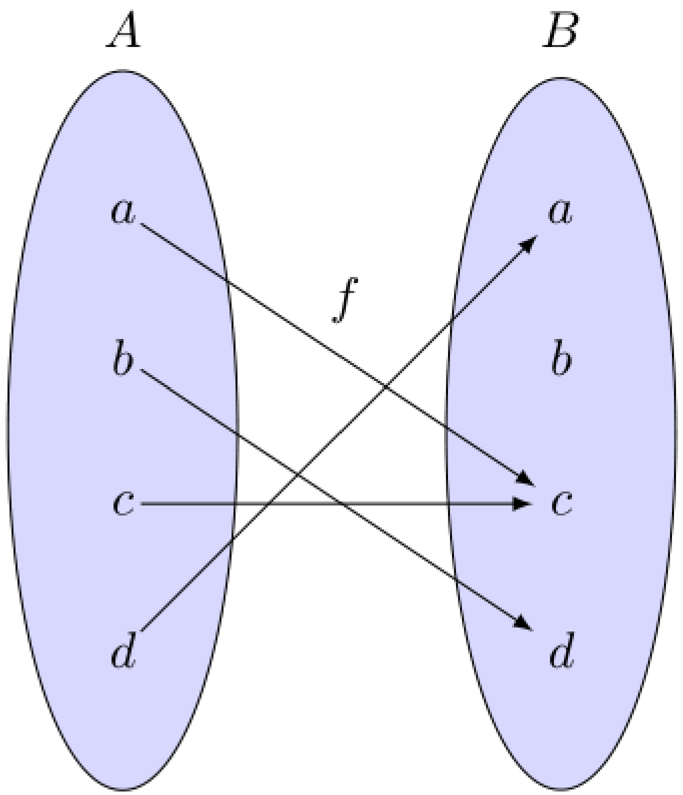
Ne.

Preslikavanje nije **jednoznačno**. Element 1 se „preslikava” i u element 1 i u element 3.

Drugi razlog je taj što nemaju **svi** elementi skupa A sliku: element 2 ovo preslikavanje ne preslikava.

Definicija funkcija

Za funkciju $f: A \to B$, elementi skupa B u koje se preslikavaju elementi skupa A tvore skup koji zovemo slika funkcije.



Sliku funkcije označavamo s R_f ili $Im(f)$

$$R_f = \{f(x) : x \in D_f\}$$

$$R_f = \{a, c, d\}$$

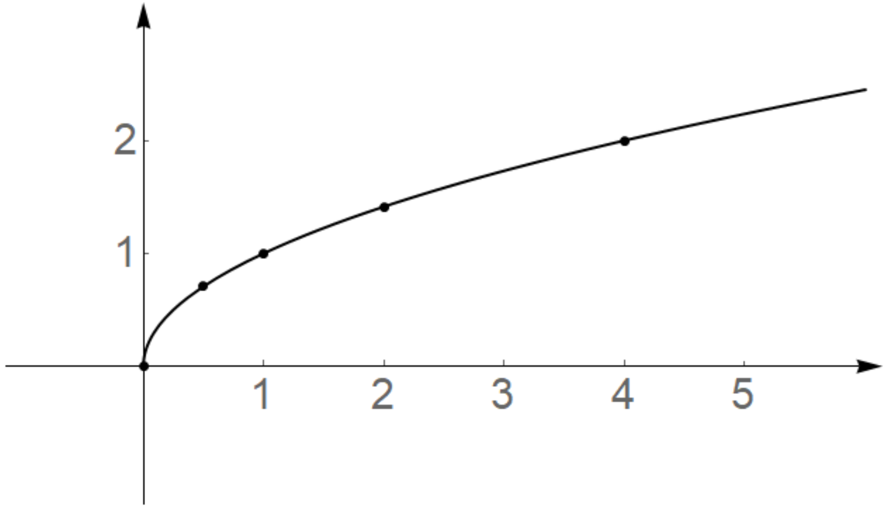
Definicija funkcija

U prethodnim primjerima vidjeli smo funkcije koje su zadane dijagramom (ili tablicom koja opisuje preslikavanje).

No to je moguće samo kada imamo dovoljno „malu” (konačnu) domenu funkcije.

Funkciju je također moguće zadati:

- grafom



- pravilom $f(x) = \sqrt{x}$

Definicija funkcija

Graf funkcije je vizualni prikaz djelovanja funkcije na beskonačnoj domeni (npr. $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^+$).

Svaka točka grafa $T(x_0, y_0)$ opisuje preslikavanje: funkcija f preslikava vrijednost x_0 u vrijednost y_0, odnosno vrijedi $y_0 = f(x_0)$.

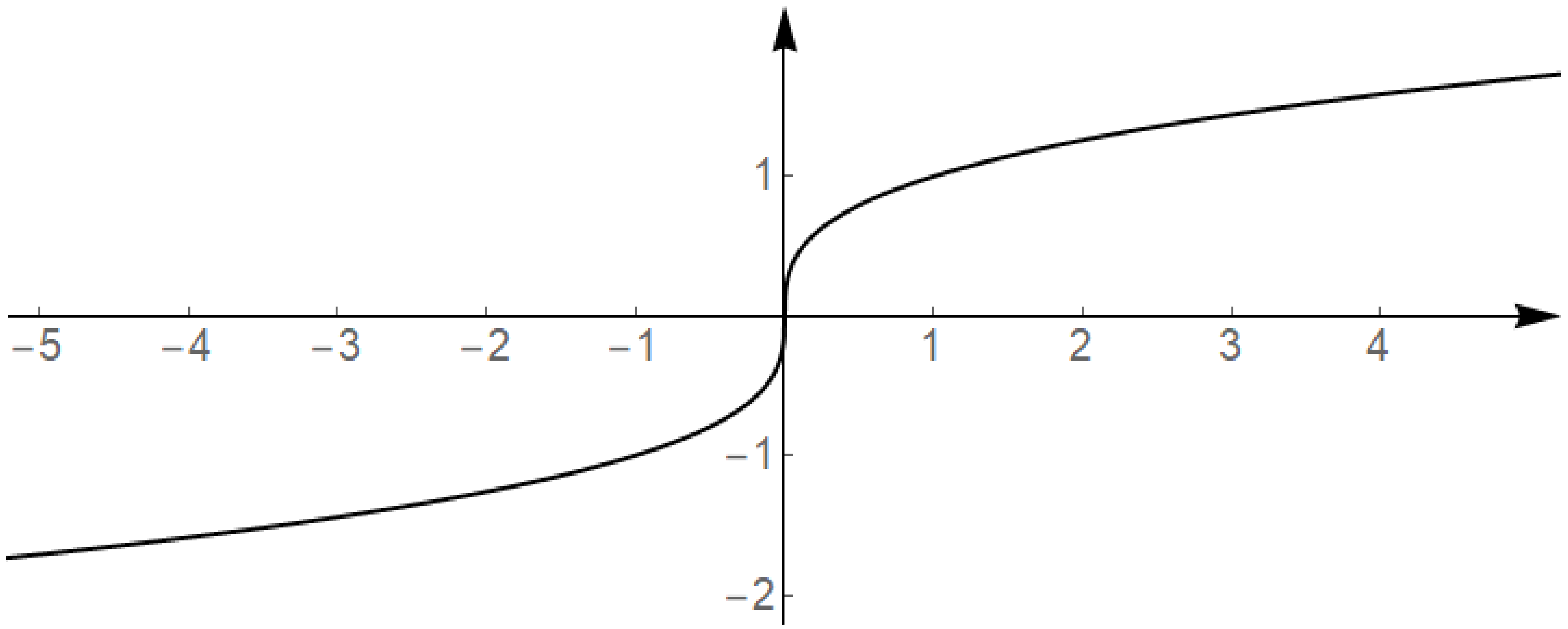
Jednoznačnost preslikavanja funkcije znači da za svaki $x \in D_f$ mora postojati **točno jedan** $y \in R_f$.

Vertikalni test

- pravac postavljen okomito na x-os krivulju mora uvijek sijeći u najviše jednoj točki
- tada je dana krivulja graf neke funkcije

Definicija funkcija

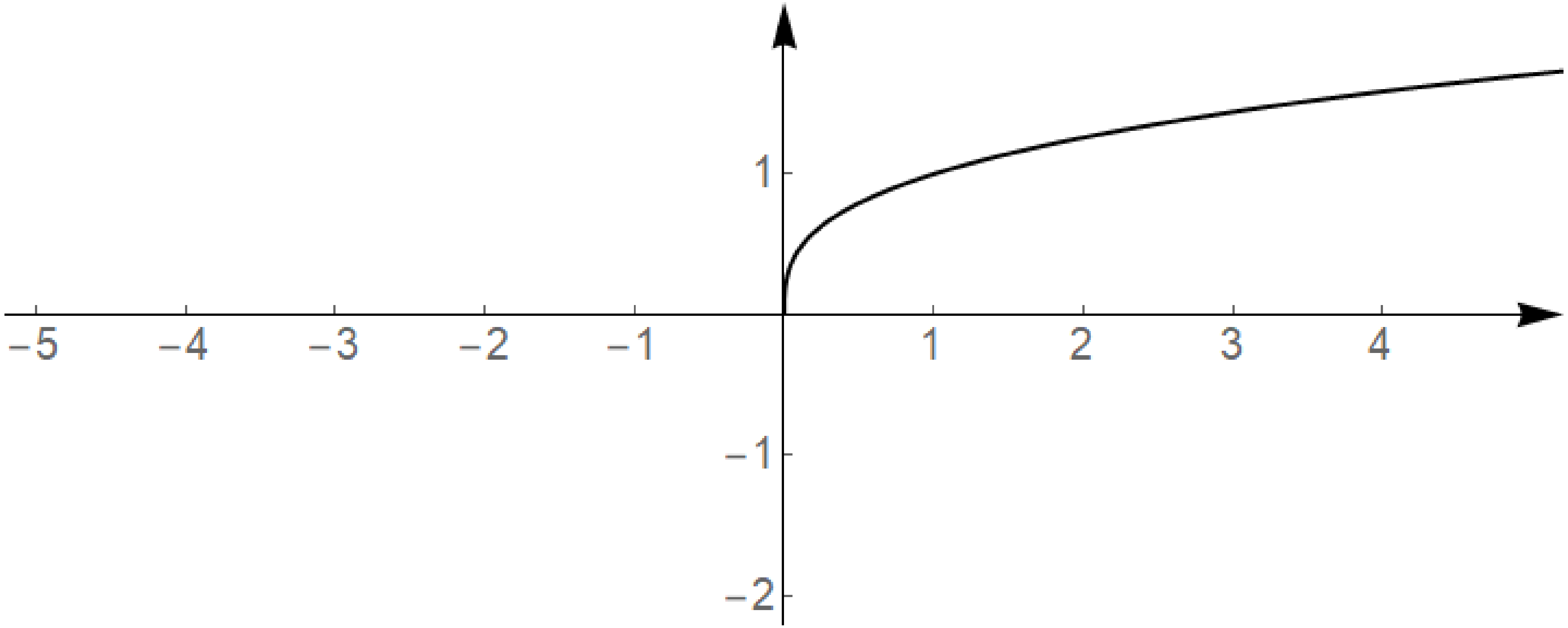
Je li slijedećim grafom prikazana funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?



Da. $D_f = \mathbb{R}$ $R_f = \mathbb{R}$

Definicija funkcija

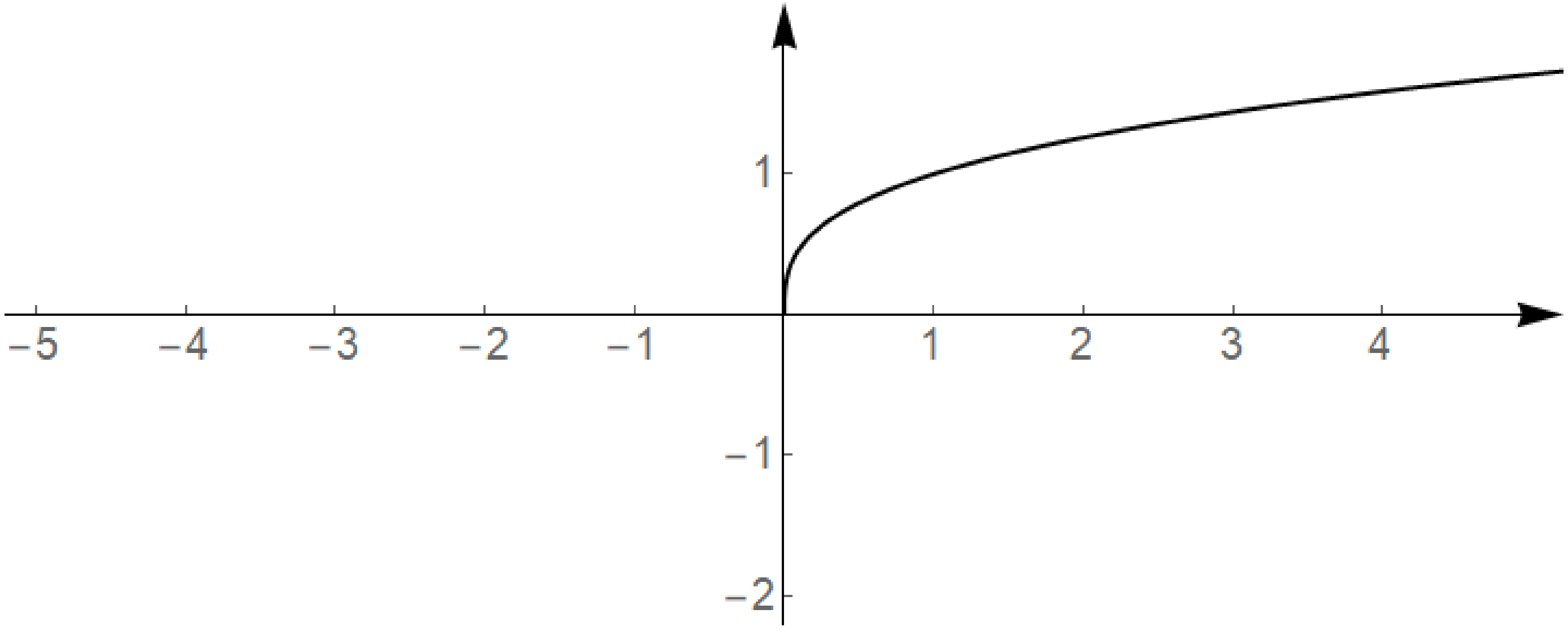
Je li slijedećim grafom prikazana funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?



Ne. Za negativne vrijednosti nije definirano preslikavanje.

Definicija funkcija

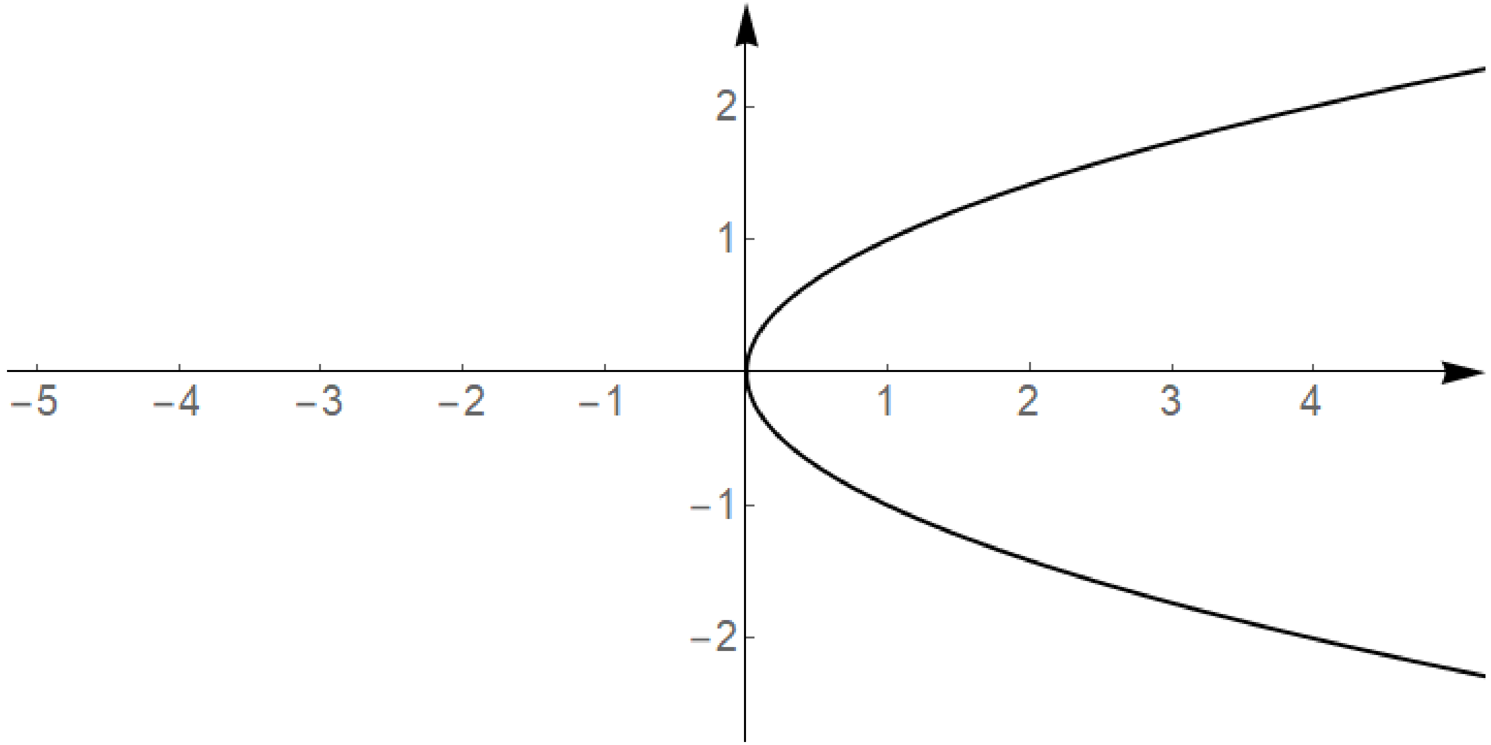
Je li slijedećim grafom prikazana funkcija $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$?



Da. $D_f = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty\rangle$ $R_f = \mathbb{R}_0^+$

Definicija funkcija

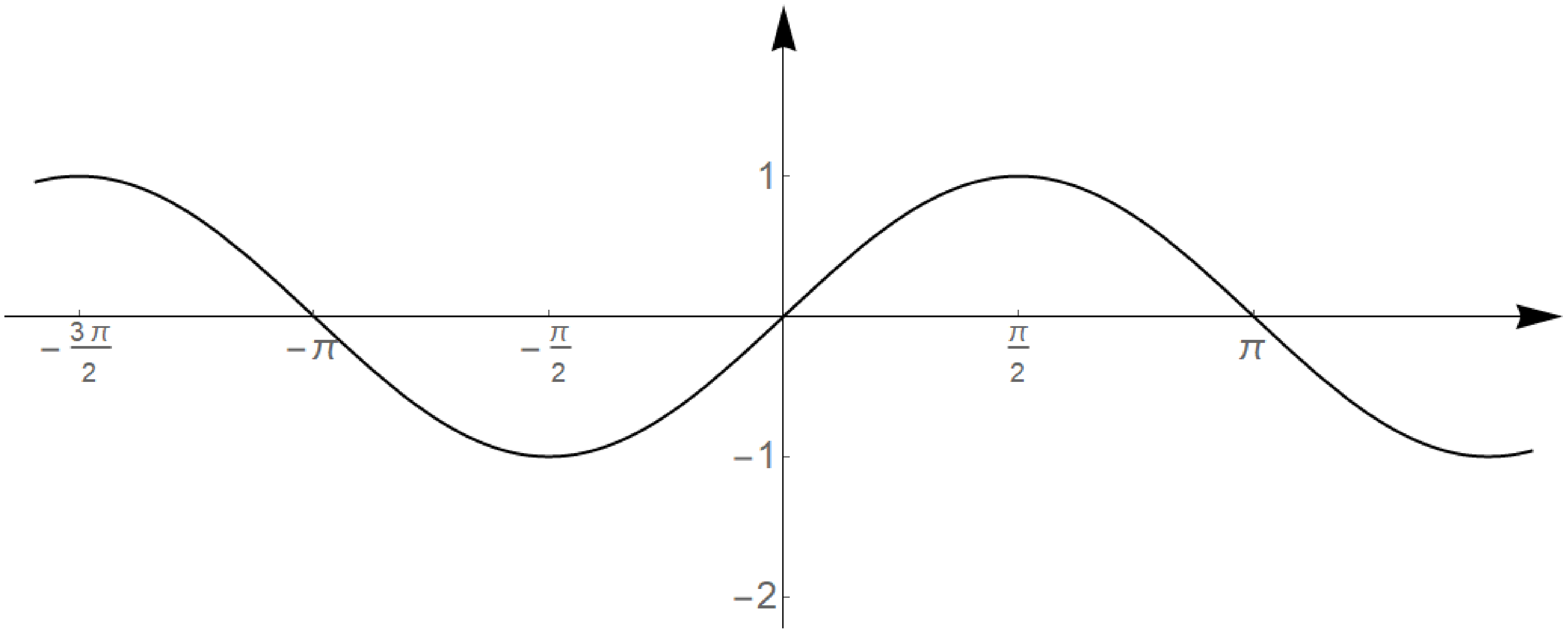
Je li slijedećim grafom prikazana funkcija $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$?



Ne. Preslikavanje nije jednoznačno.

Definicija funkcija

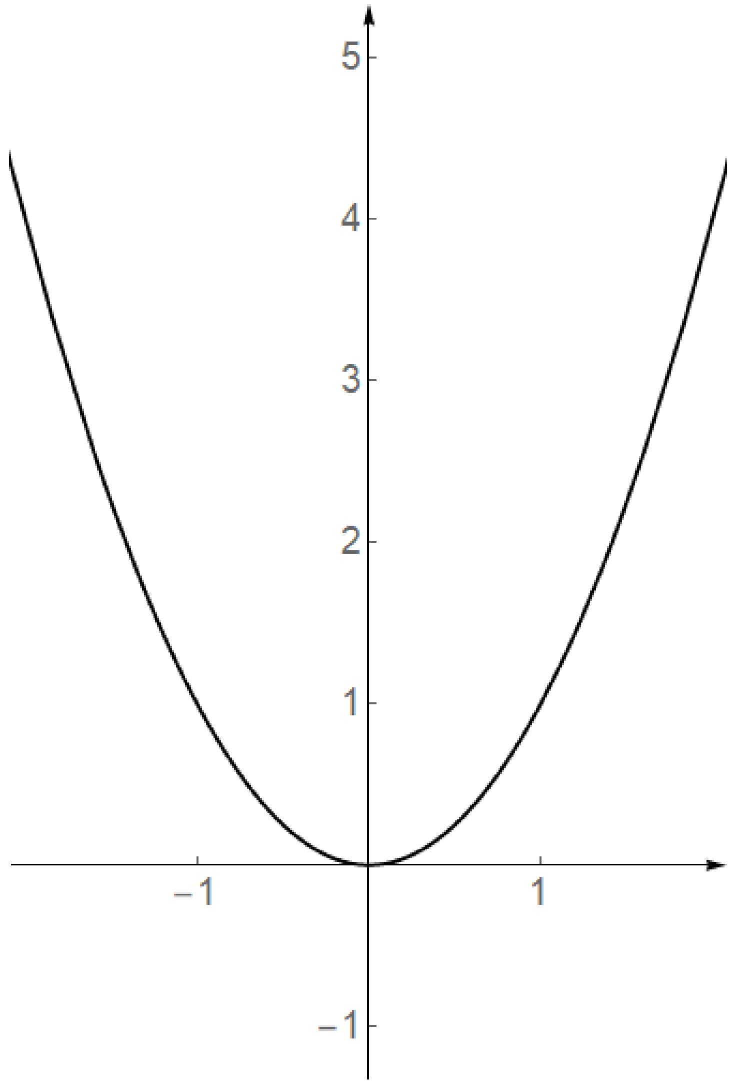
Je li slijedećim grafom prikazana funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?



Da. $D_f = \mathbb{R}$ $R_f = [-1,1]$

Definicija funkcija

Je li slijedećim grafom prikazana funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?



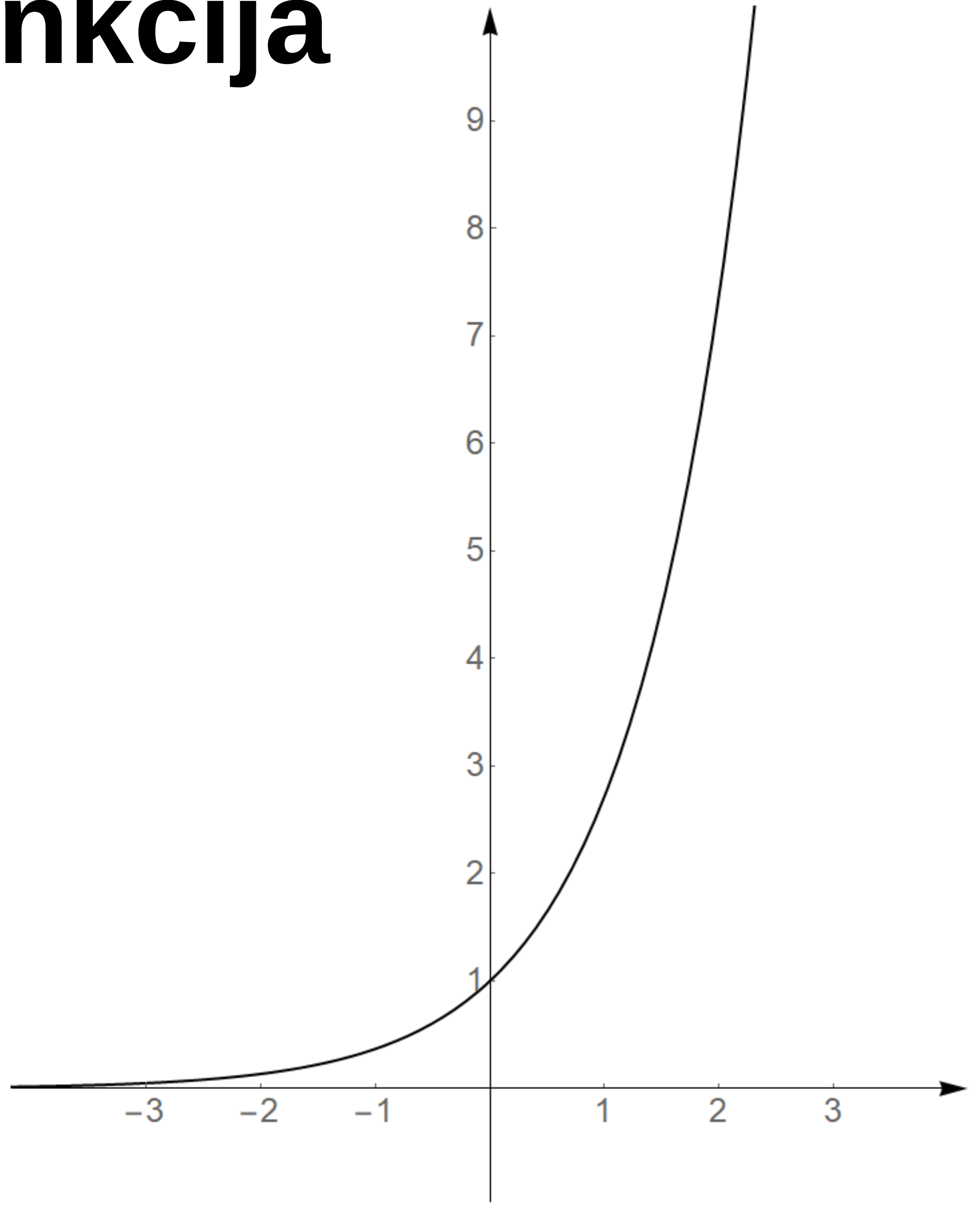
Da.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty\rangle$$

Definicija funkcija

Je li slijedećim grafom prikazana funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?



Da.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty \rangle$$

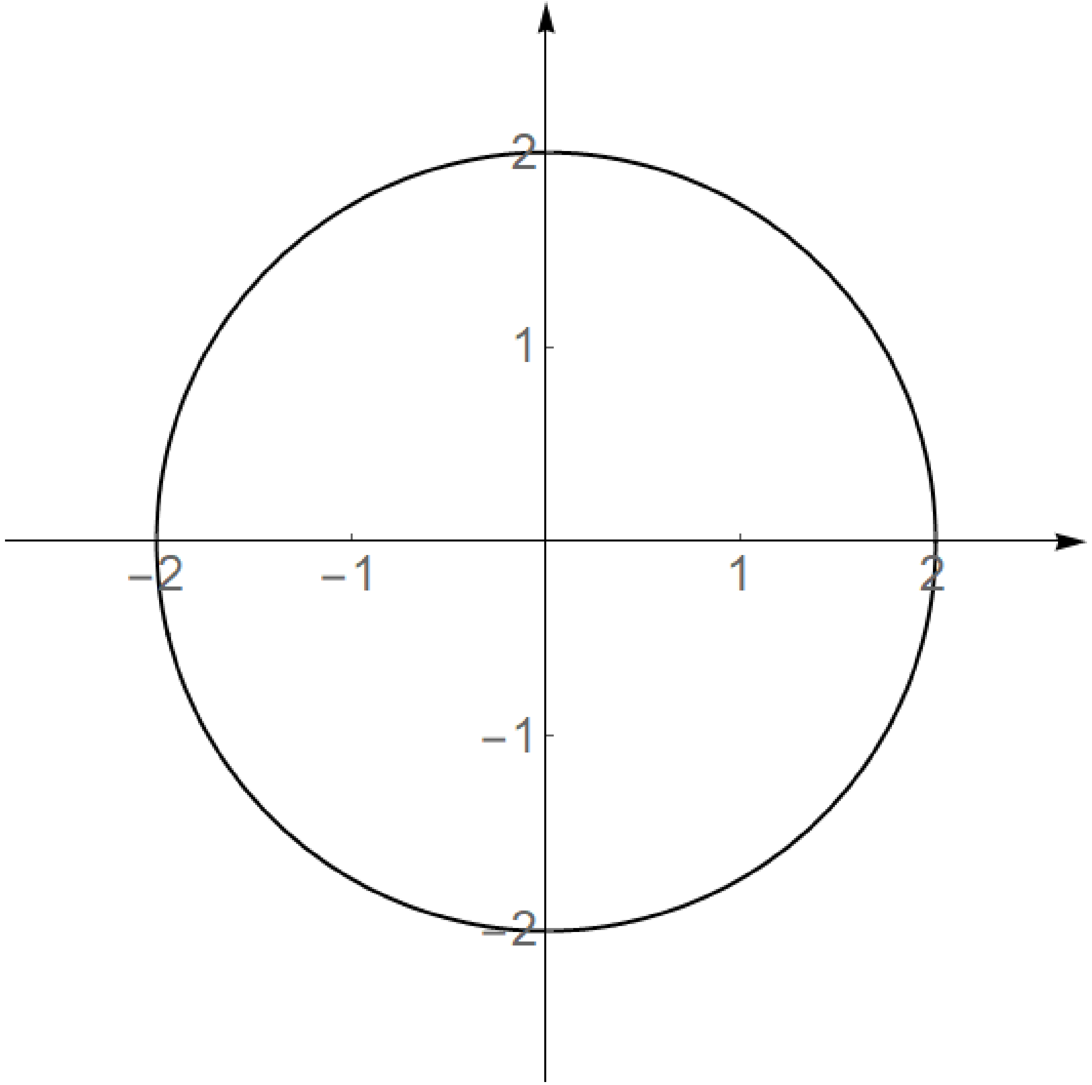
Definicija funkcija

Je li slijedećim grafom prikazana funkcija $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$?

Ne.

Preslikavanje nije jednoznačno.

Možemo promatrati posebno gornji i donji dio kružnice.



Definicija funkcija

Kako zapisati jednadžbe tih funkcija?

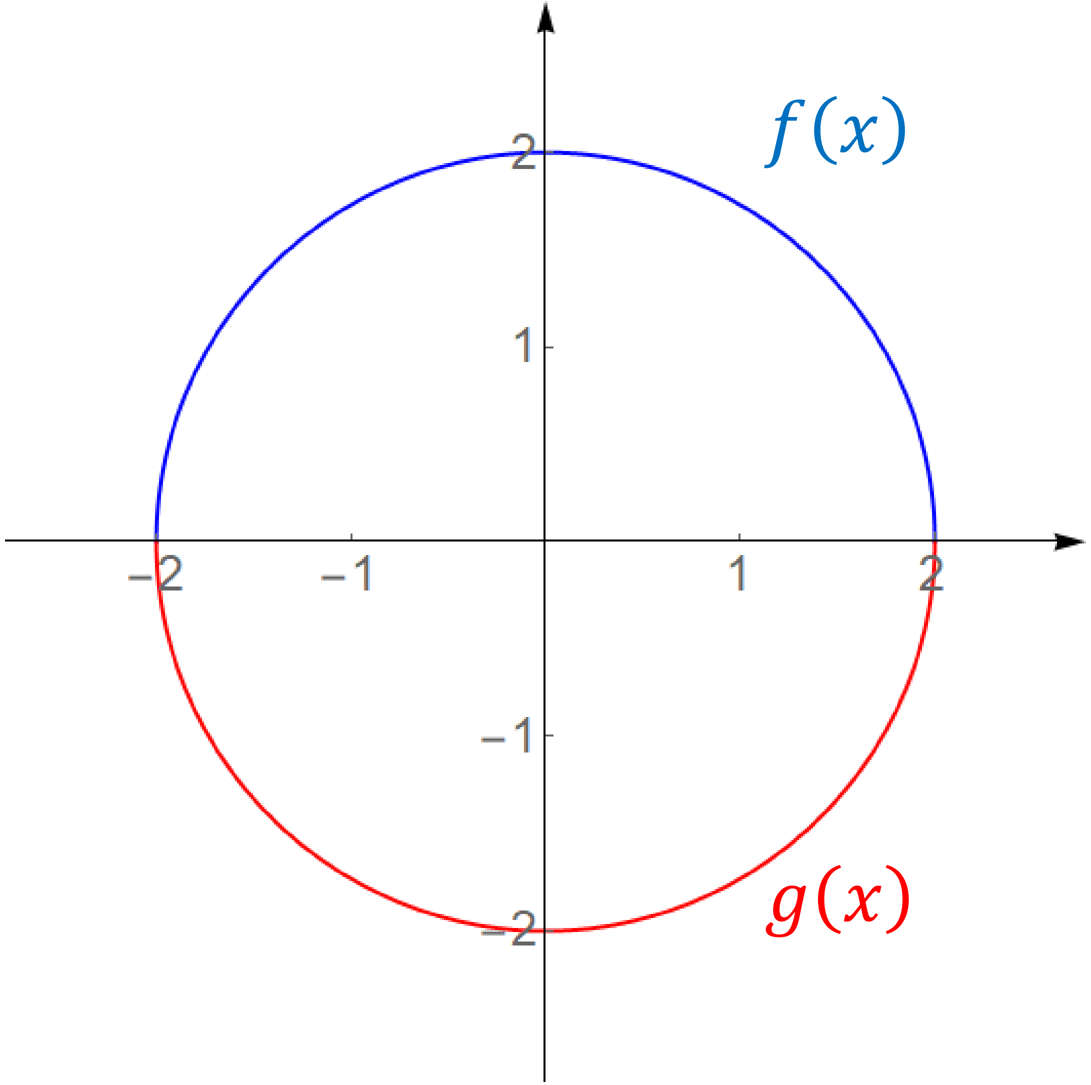
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

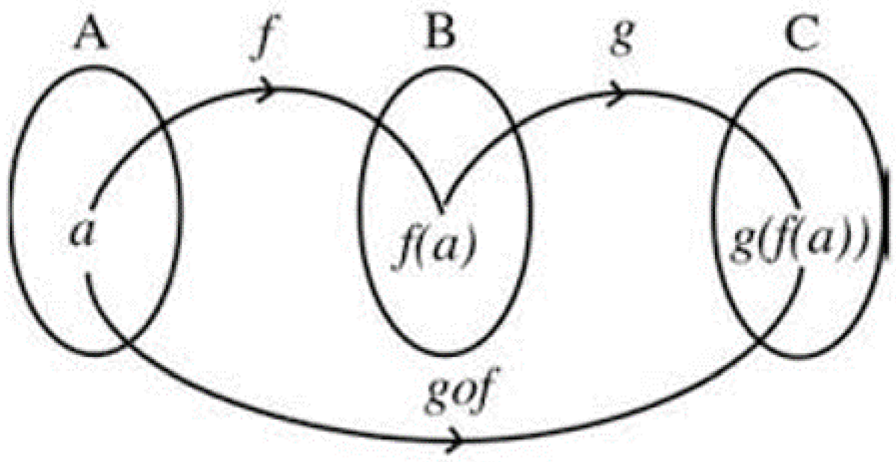
$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$



Kompozicija funkcija

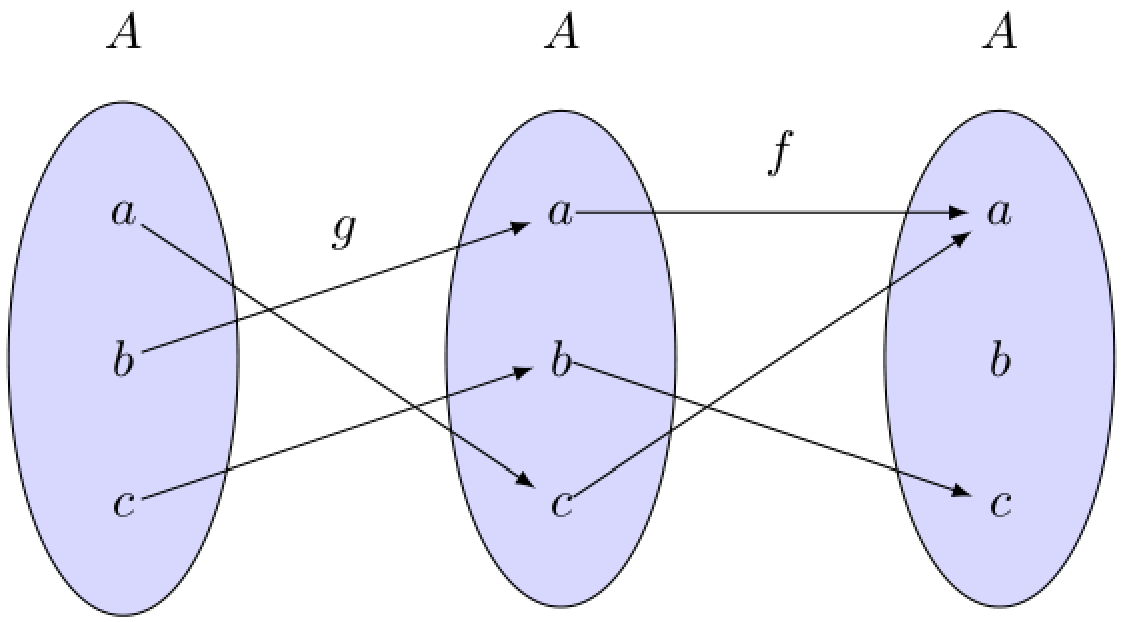
Kompozicija funkcija je način opisivanja uzastopnog djelovanja dvije ili više funkcija.



Zapis kompozicije funkcija: $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

Kompozicija funkcija

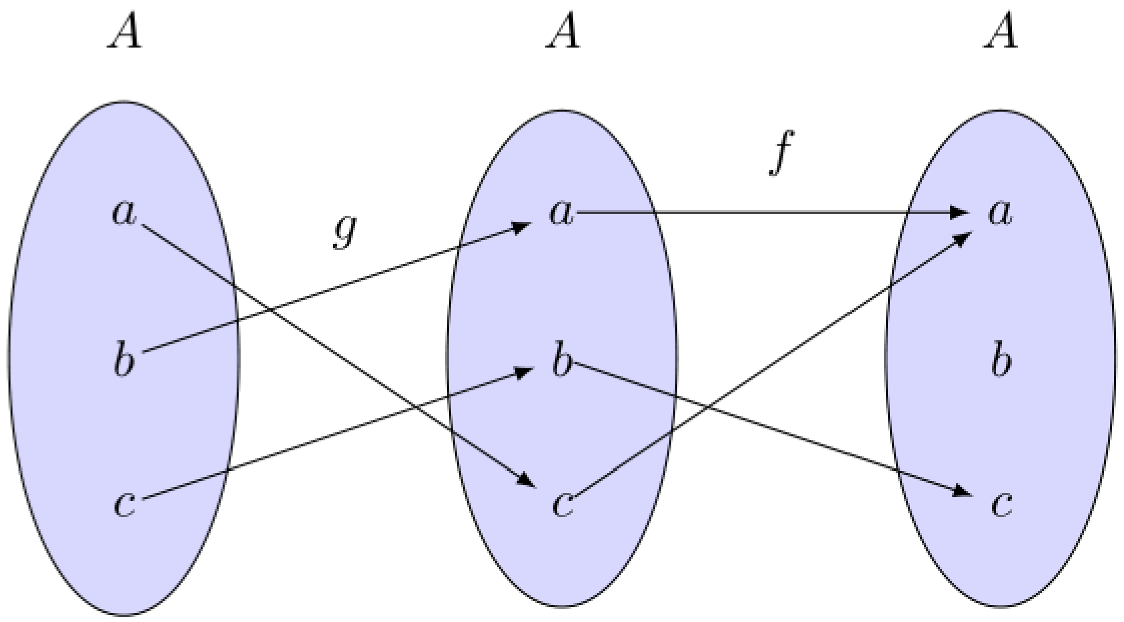
Kako dijagramima prikazati kompoziciju funkcija?



Koja je kompozicija prikazana na dijagramu? $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

Kompozicija funkcija

Odredimo rezultate funkcije $(f \circ g)(x)$



$$(f \circ g)(a) = f(c) = a$$

$$(f \circ g)(b) = f(a) = a$$

$$(f \circ g)(c) = f(b) = c$$

Kompozicija funkcija

Odredite kompoziciju $f \circ g$ ako su $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 + 1$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 1) = 2 \cdot (x^2 + 1) + 3 = 2x^2 + 5$$

Odredite kompoziciju $g \circ f$ ako su $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 + 1$.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 1 = 4x^2 + 12x + 10$$

Odavde vidimo kako kompozicija funkcija **nije komutativna** operacija, tj. da je općenito $f \circ g \neq g \circ f$.

Kompozicija funkcija

Odredite vrijednost parametra $b \in \mathbb{R}$, takvog da za funkcije $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = bx + 1$ vrijedi $f \circ g = g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(bx + 1) = 2 \cdot (bx + 1) + 3 = 2bx + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x + 3) = b \cdot (2x + 3) + 1 = 2bx + 3b + 1$$

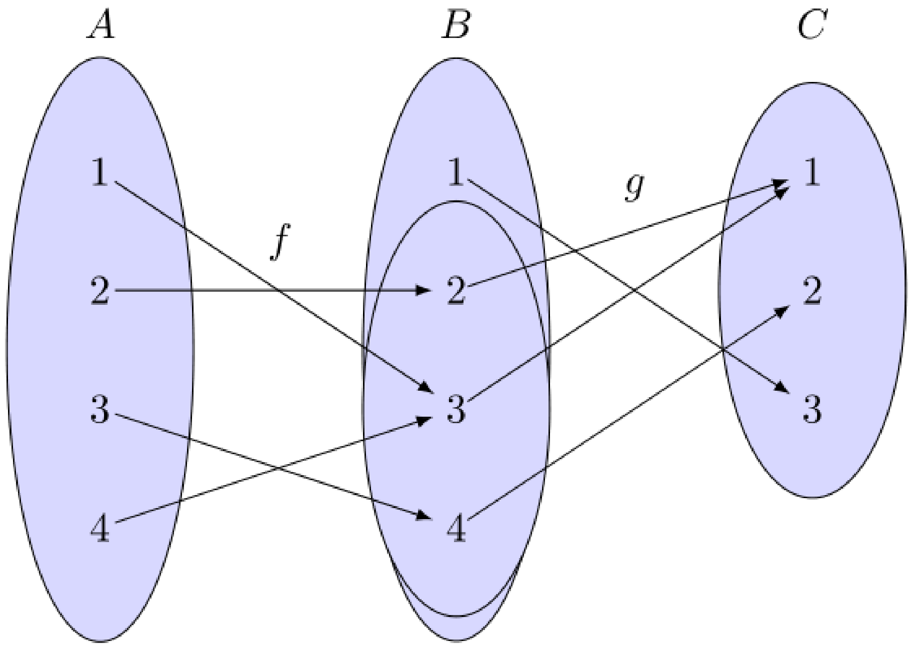
$$2bx + 5 = 2bx + 3b + 1$$

$$3b = 4 \qquad b = \frac{4}{3}$$

Kompozicija funkcija

Kada će kompozicija funkcija $g \circ f$ biti dobro definirana?

Ako je slika funkcije f sadržana u domeni funkcije g.



Dakle, mora vrijediti:

$$R_f \subseteq D_g$$

Kompozicija funkcija

Zadane su funkcije: $f(x) = x - 2, \quad g(x) = \ln x$

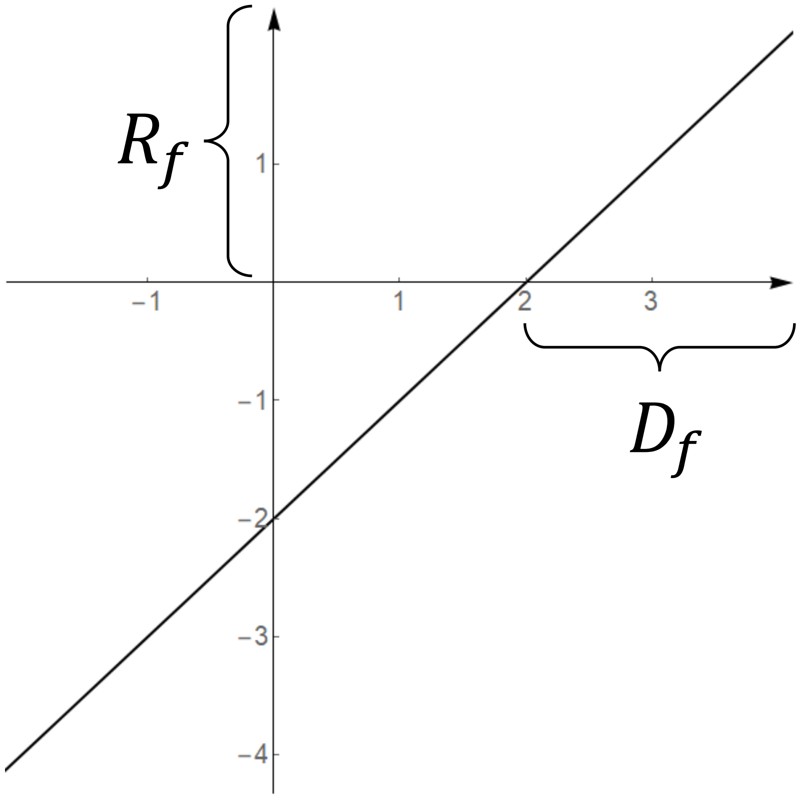
Definirajte domenu i kodomenu funkcija f i g kako bi kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$ bile dobro definirane.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Dakle, mora vrijediti: $R_f \subseteq D_g$

$g : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$

$f : \langle 2, \infty \rangle \to \langle 0, \infty \rangle$



Kompozicija funkcija

Kompozicija funkcija je **asocijativna** operacija.

To znači da za neke tri funkcije f, g, h vrijedi:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$$

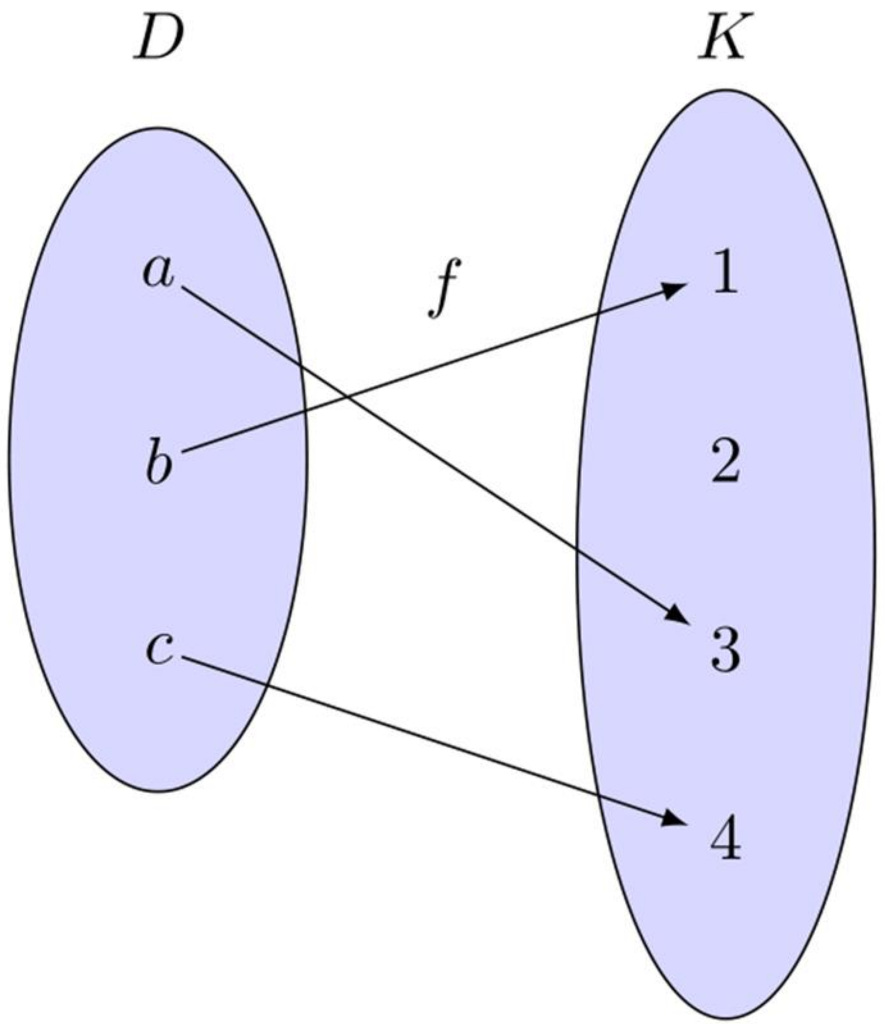
$$\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$$

Svojstva funkcije

Za funkciju $f\colon D \to K$ kažemo da je **injekcija** ako se različiti elementi domene preslikavaju u različite elemente kodomene.

Kod dijagrama: ne postoje dvije strelice koje završavaju u istom elementu kodomene.

Kodomena ima više (ili jednako) elemenata od domene.

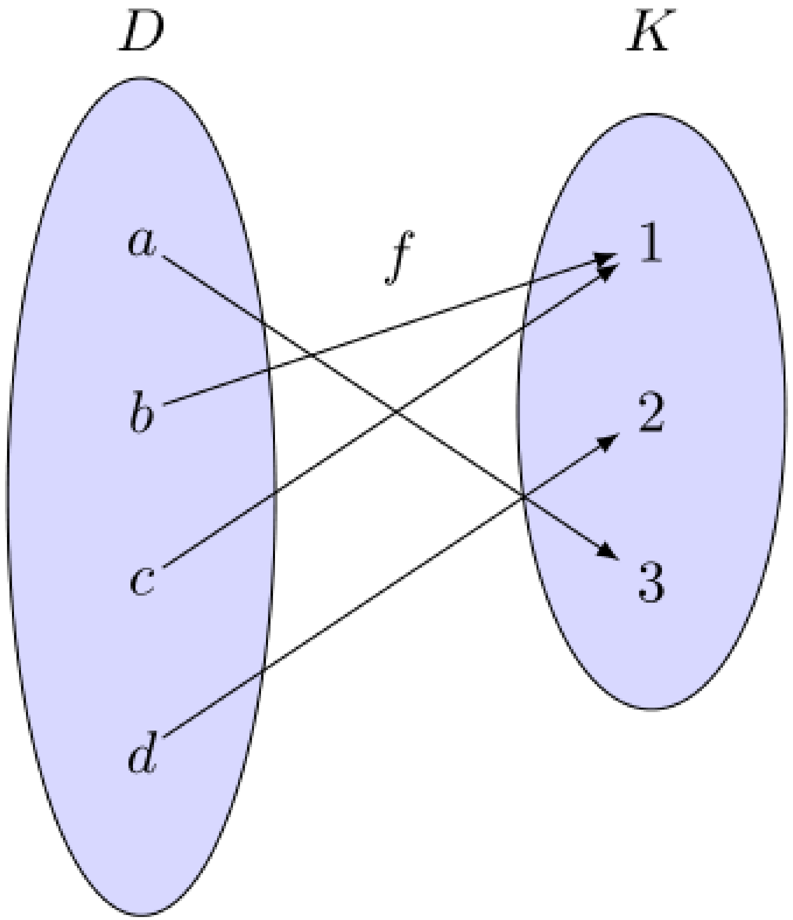


Svojstva funkcije

Za funkciju $f: D \to K$ kažemo da je **surjekcija** ako se u svaki element kodomene preslikava neki element domene.

$f: D \to K$ je surjekcija $\Leftrightarrow R_f = K$

Domena ima više (ili jednako) elemenata od kodomene.

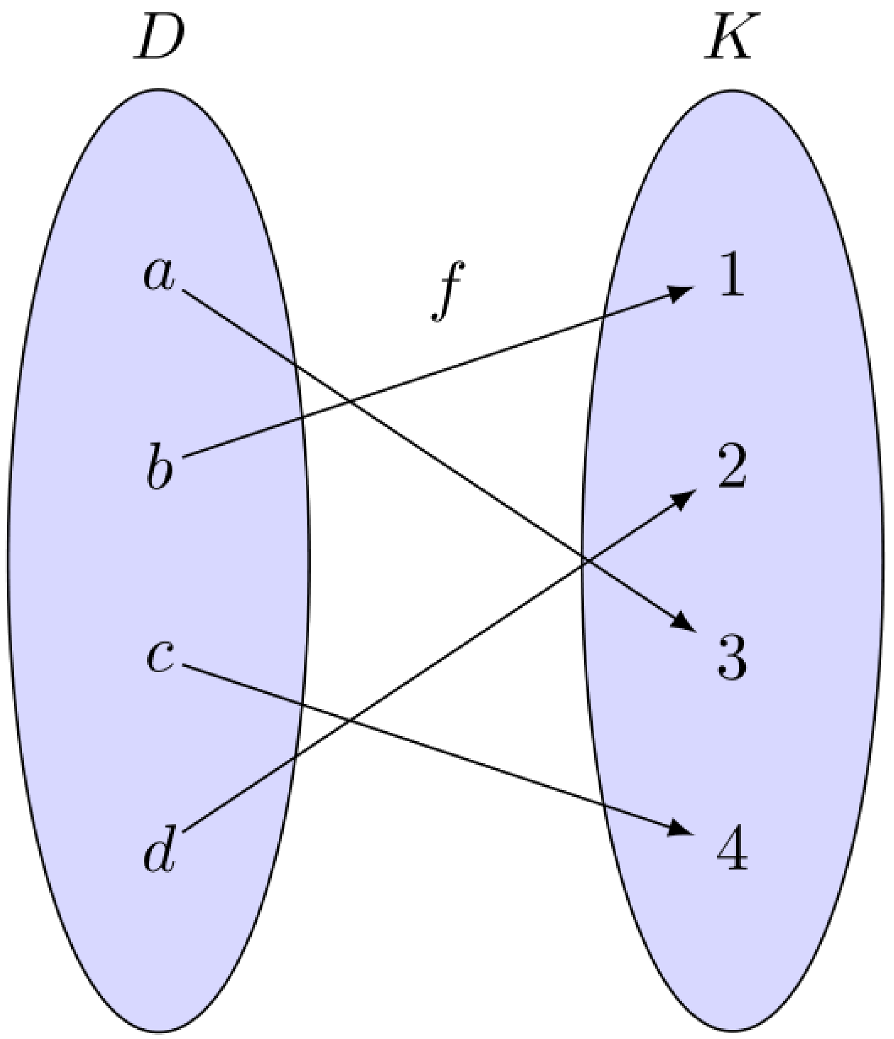


Svojstva funkcije

Za funkciju $f\colon D \to K$ kažemo da je **bijekcija** ako je surjekcija i injekcija.

Takvo preslikavanje se još naziva i „jedan-na-jedan” preslikavanje (one-to-one mapping).

Skupovi između kojih postoji bijekcija imaju jednak broj elemenata.

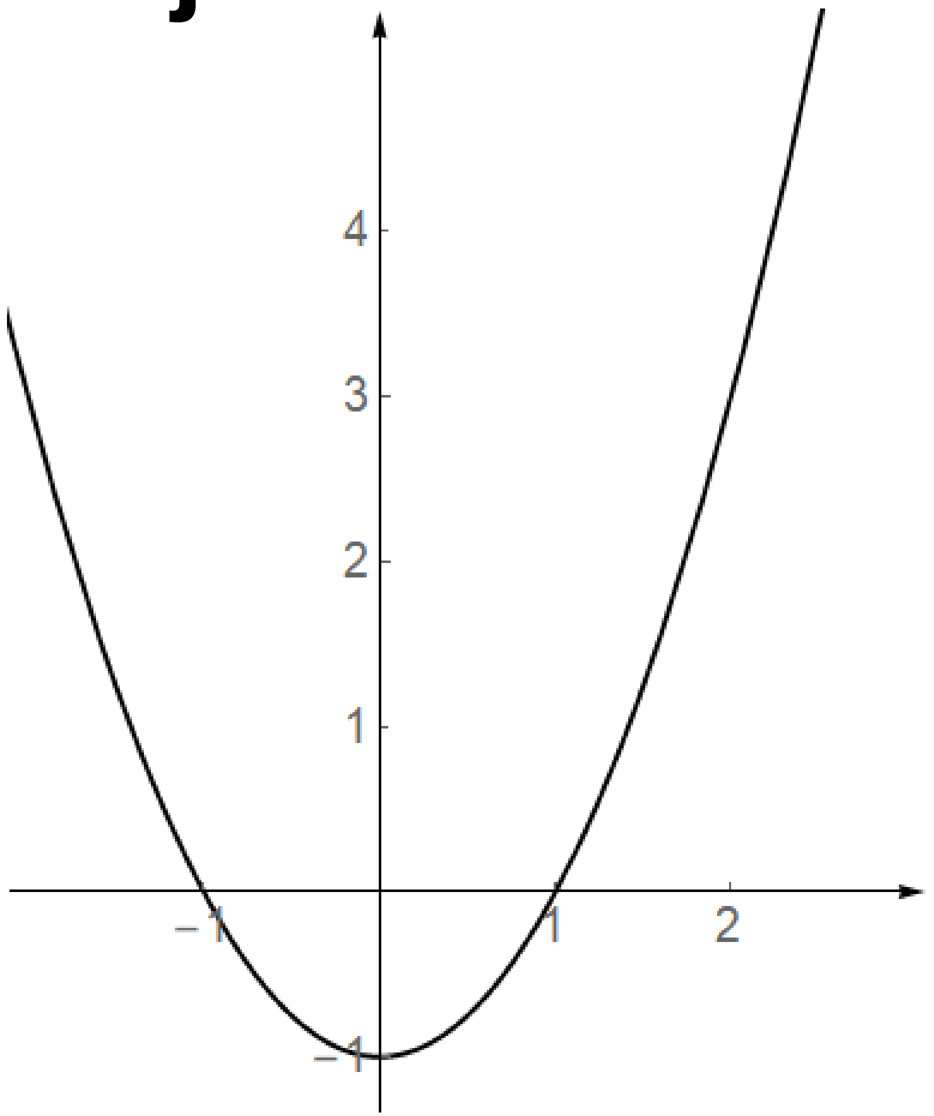


Svojstva funkcije

Kako se ta svojstva vide kod grafova funkcija?

Surjekcija: slika funkcije jednaka je kodomeni.

Je li funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prikazana slijedećim grafom surjekcija?



Ne. Slika te funkcije je $R_f = [-1, \infty\rangle$

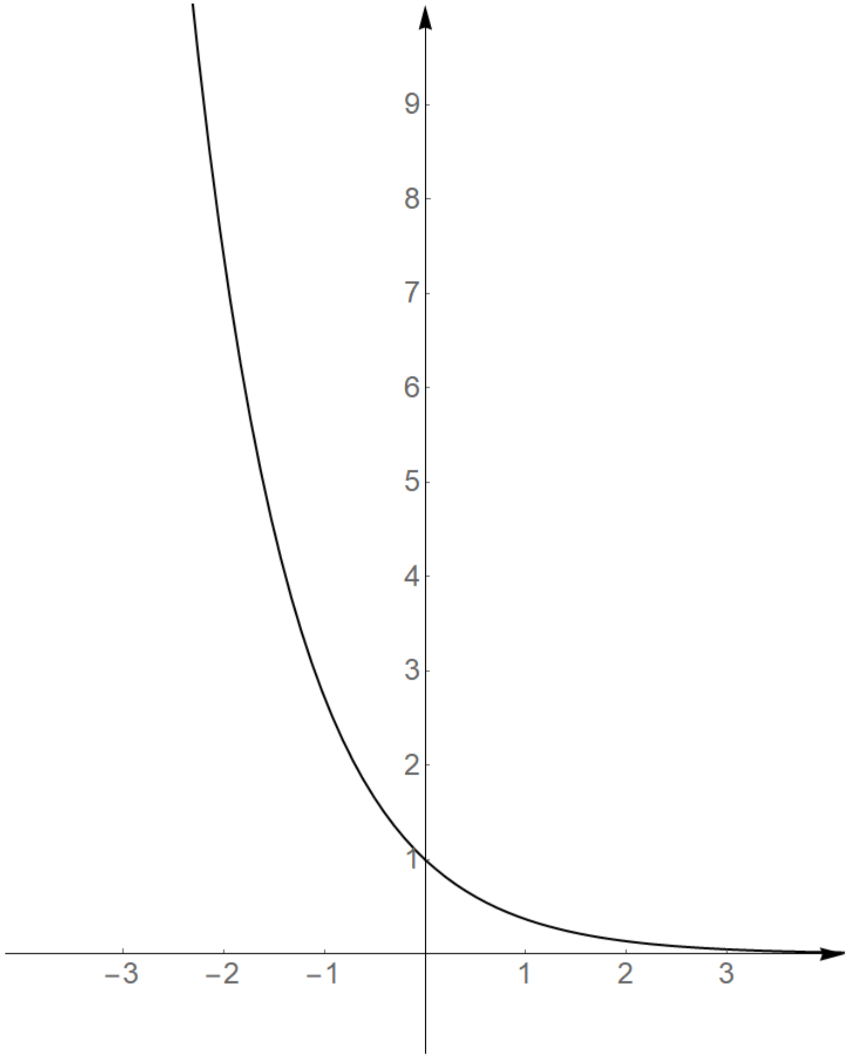
Svojstva funkcije

Kako se ta svojstva vide kod grafova funkcija?

Surjekcija: slika funkcije jednaka je kodomeni.

Je li funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ prikazana slijedećim grafom surjekcija?

Da. Slika te funkcije je $R_f = \mathbb{R}^+$



Svojstva funkcije

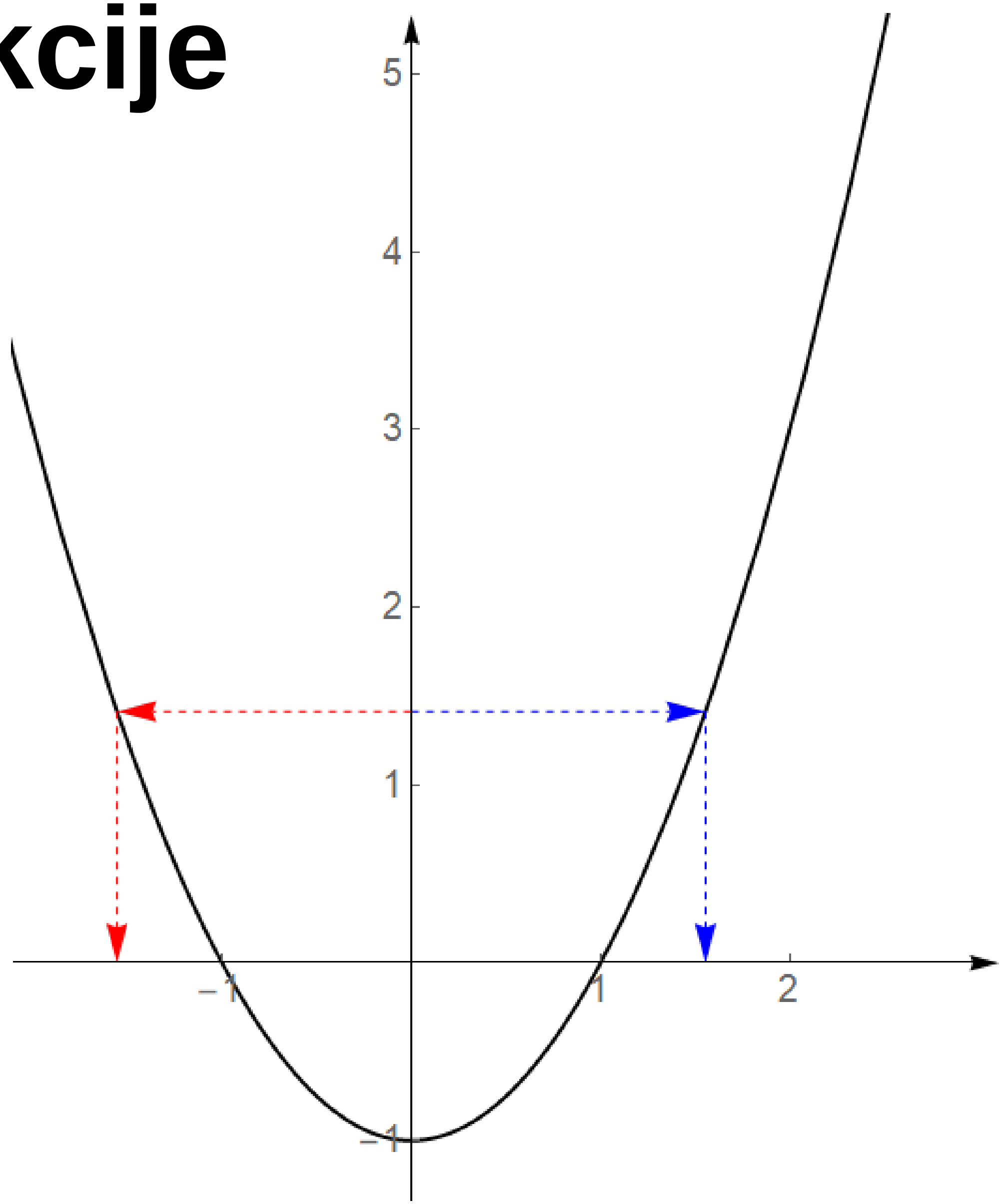
Kako se ta svojstva vide kod grafova funkcija?

Injekcija: za svaki y mora postojati točno jedan x koji se preslikava u taj y.

Horizontalni test: svaki pravac položen paralelno s x-osi siječe graf funkcije u jednoj točki.

Je li funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prikazana slijedećim grafom injekcija?

Ne.



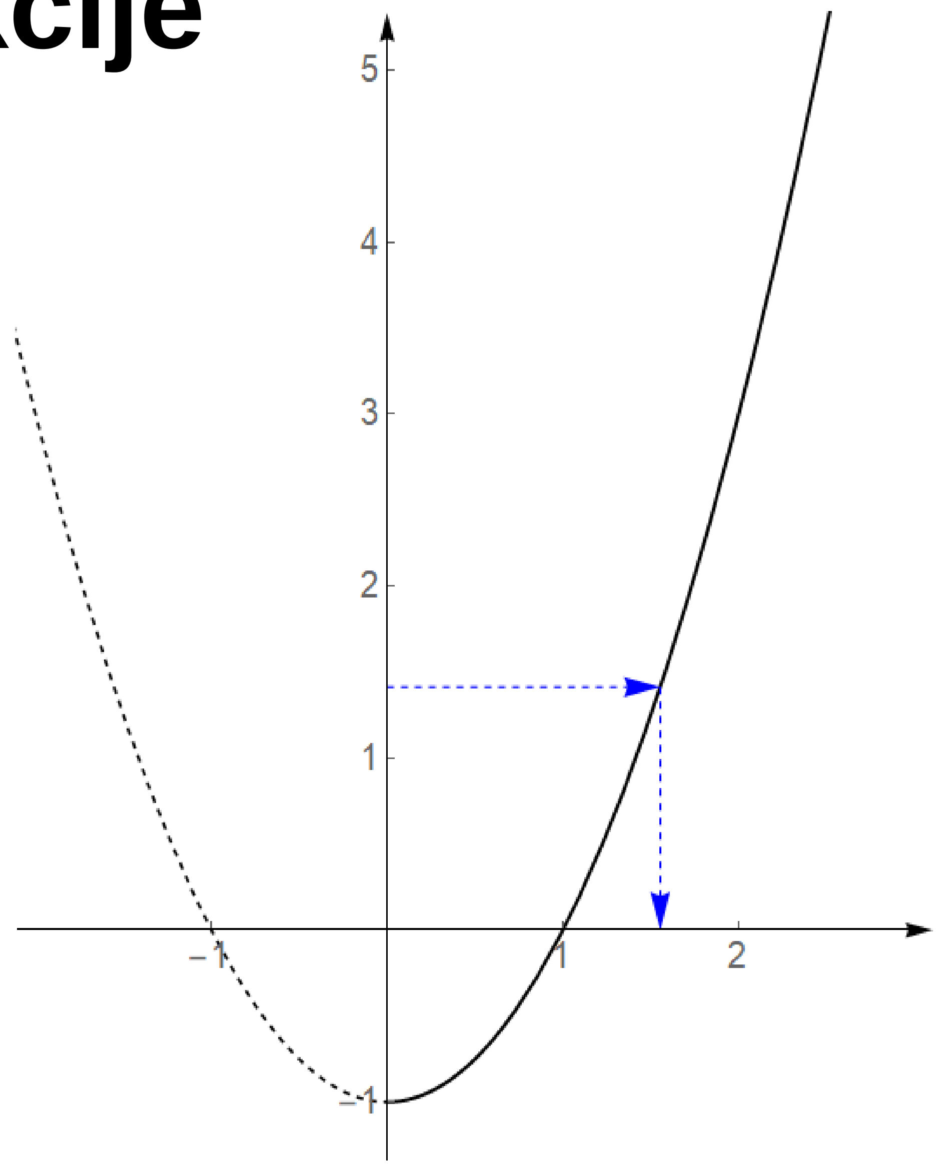
Svojstva funkcije

Kako se ta svojstva vide kod grafova funkcija?

Injekcija: za svaki y mora postojati točno jedan x koji se preslikava u taj y.

Je li ista funkcija, na drugoj domeni, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, prikazana slijedećim grafom injekcija?

Da.

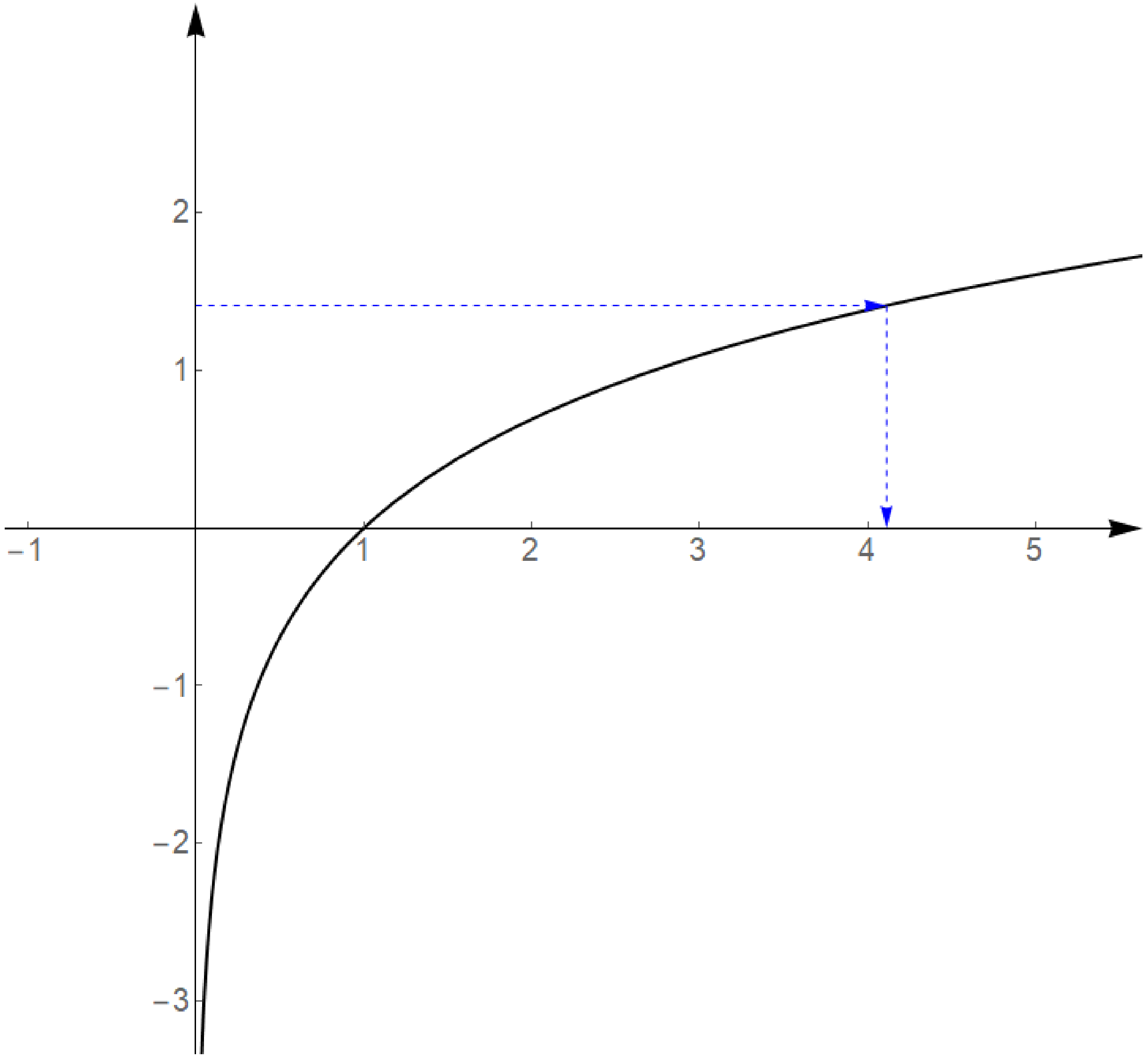


Svojstva funkcije

Kako se ta svojstva vide kod grafova funkcija?

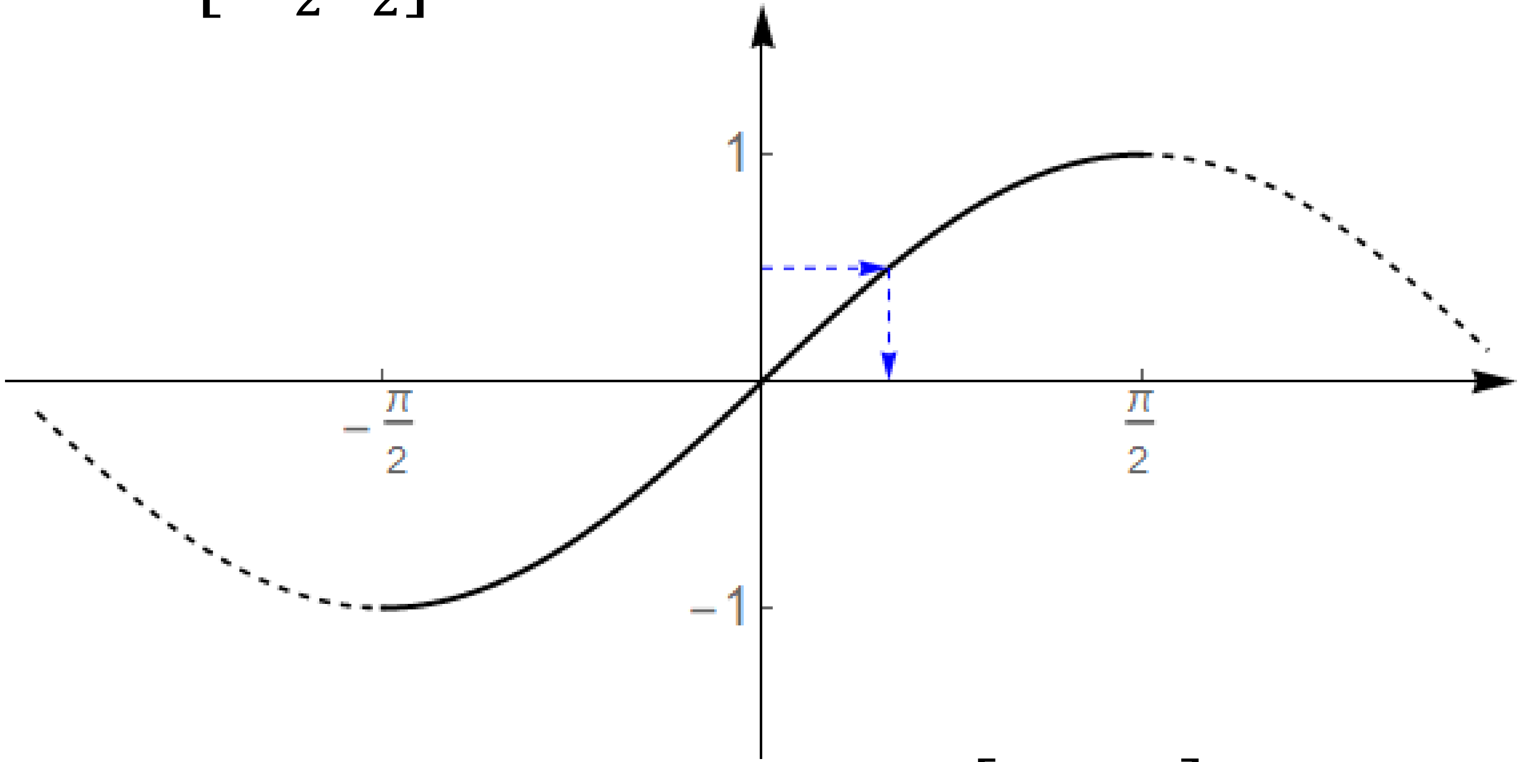
Je li funkcija, $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, prikazana slijedećim grafom bijekcija?

Da.



Svojstva funkcije

Je li funkcija, $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, prikazana slijedećim grafom bijekcija?



Ne.

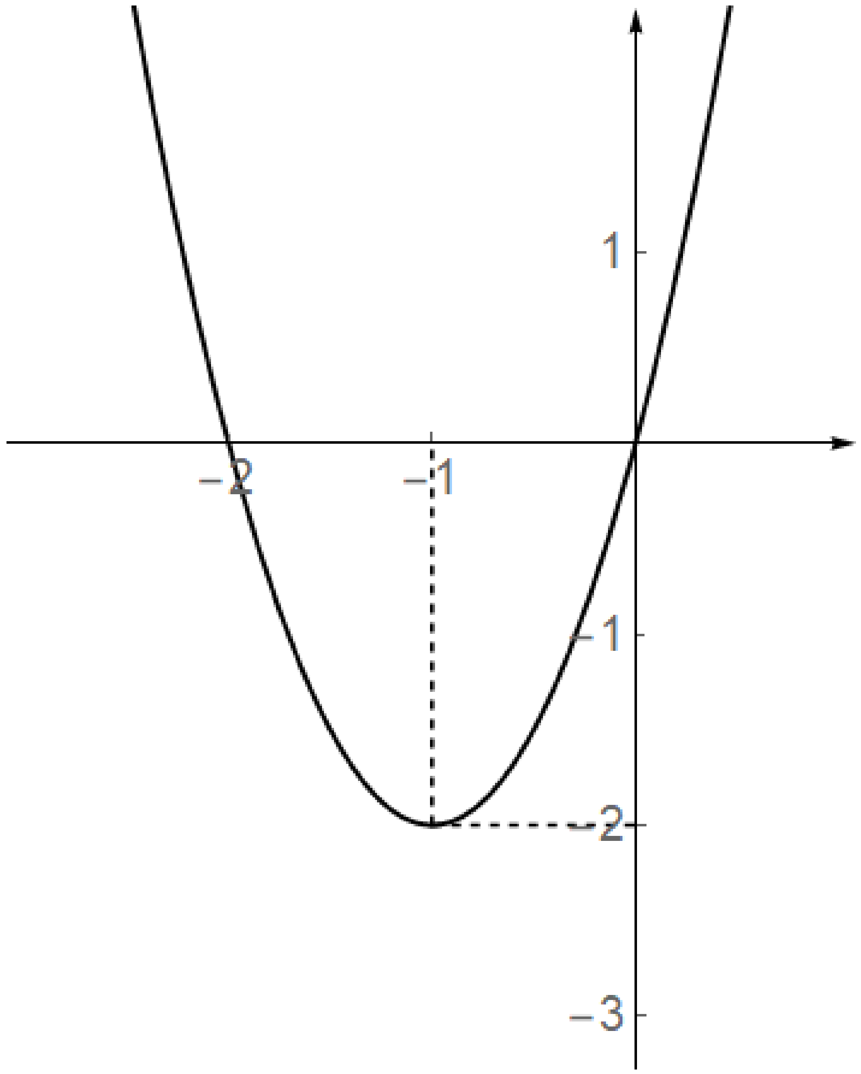
No funkcija $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ je bijekcija!

Svojstva funkcije

Odredite domenu i kodomenu funkcije prikazane grafom tako da funkcija bude bijekcija.

$$f : [-1, \infty\rangle \to [-2, \infty\rangle$$

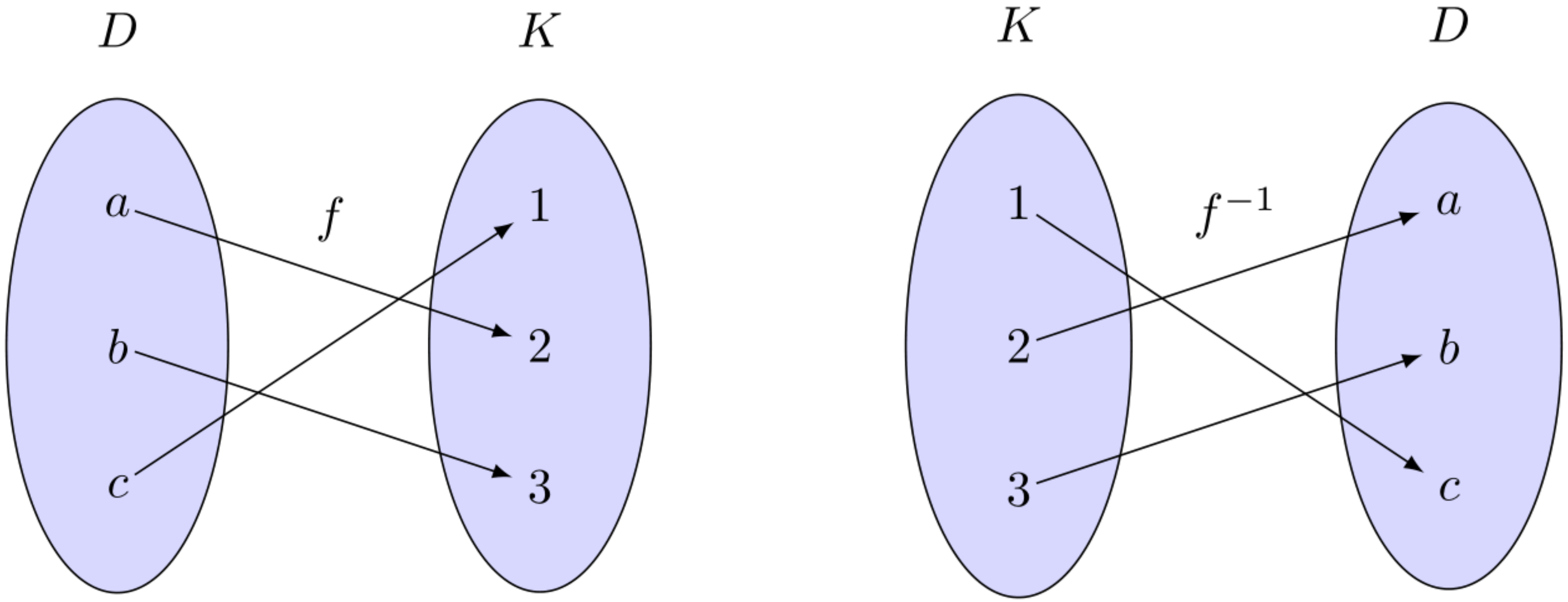
$$f : \langle -\infty, -1] \to [-2, \infty\rangle$$



Inverz funkcije

Za funkciju $f: D \to K$ koja je bijekcija, možemo definirati inverznu funkciju $f^{-1}: K \to D$.

Ako je $f(x) = y$, tada za inverznu funkciju vrijedi $f^{-1}(y) = x$.



Inverz funkcije

Za inverznu funkciju funkcije f vrijedi:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

Funkcija f^{-1} je također bijekcija.

Inverz funkcije, ukoliko postoji, je jedinstven.

Inverz funkcije

Odredite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \ln(2x+3)$

$$y = \ln(2x+3)$$

$$x = \ln(2y+3)$$

$$e^x = 2y+3$$

$$e^x - 3 = 2y$$

$$y = \frac{e^x - 3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x - 3}{2}$$

Provjerite dobiveni rezultat!

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right)$$

$$= f\left(\frac{e^x - 3}{2}\right) = \ln\left(2 \cdot \frac{e^x - 3}{2} + 3\right)$$

$$= \ln(e^x) = x$$

Inverz funkcije

Odredite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

$$y = \sqrt{x^3 + 1}$$

$$x = \sqrt{y^3 + 1}$$

$$x^2 = y^3 + 1$$

$$y^3 = x^2 - 1$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

Provjerite dobiveni rezultat!

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right)$$

$$= f\left(\sqrt[3]{x^2 - 1}\right) = \sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2 - 1}\right)^3 + 1}$$

$$= \sqrt{x^2 - 1 + 1} = x$$

Hvala ☺