MATEMATIKA

Matrice


imgflip.com

Matrice

Knjiga „*Matematika za IT*”

- Poglavlje „Matrice”, str. 125. – 130.

Definicija matrice

Neka su m i n prirodni brojevi. Matrica A reda (tipa, formata) $m \times n$ (m, n) je svaka pravokutna tablica elemenata poredanih u m redaka i n stupaca.

Često se piše $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ gdje je a_{ij} opći element matrice za sve $i = 1,2, \ldots, m$ (retci) i $j = 1,2, \ldots, n$ (stupci).

$$A \epsilon M_{mn}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrice

Gdje koristimo matrice?

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primjer: Marko, Ivana i Petar kupuju namirnice.

Marko je kupio tri kruha, dva mlijeka i četiri soka.

Ivana nije kupila kruh, ali je kupila tri mlijeka i jedan sok.

Petar je kupio dva kruha, jedno mlijeko i nije kupio sok.

	Kruh	Mlijeko	Sok
Marko	3	2	4
Ivana	0	3	1
Petar	2	1	0

Matrice

Svaki od tih proizvoda ima neku cijenu.

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kruh košta 8 kuna.

Mlijeko košta 6 kuna.

Sok košta 10 kuna.

$$C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Koliko je potrošio Marko?

$$T(Marko) = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 10 = 76$$

Tu operaciju ćemo obraditi kao množenje matrica.

$$K \cdot C = \begin{bmatrix} 76 \\ 28 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Matrice

Općenito, matrice služe za sistematičnu pohranu velikog broja podataka, te njihovu obradu.

Matrični račun se intenzivno koristi u kompjuterskoj grafici, robotici, optimizaciji troškova u velikim sustavima, statističkim obradama velikog broja podataka (npr. o stanovništvu), ekonomiji…

U upotrebi je nekoliko načina zapisa matrica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix}$$

Tipovi matrica

Kvadratna matrica je matrica koja ima jednak broj redaka i stupaca.

$$A \in M_n$$

Matrica A ima n redaka i n stupaca.

$$[2] \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \in M_1 \qquad A \in M_2 \qquad A \in M_3 \qquad A \in M_4$$

Tipovi matrica

Elemente matrice označavamo s a_{ij}.

S i i j dane su koordinate elementa u matrici:

- i-ti redak
- j-ti stupac

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \text{2. stupac} & \phantom{a_{13}} & \phantom{a_{14}} \\ & \downarrow & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \text{3. red} \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}
\end{array}$$

Tipovi matrica

Glavna dijagonala matrice je uređena n-torka elemenata matrice, oblika $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boldsymbol{a_{44}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 1 & 0 \\ 2 & \mathbf{2} & 3 \\ 3 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 1 & 1 & 2 \\ 2 & \mathbf{2} & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Trag kvadratne matrice je zbroj elemenata na glavnoj dijagonali.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad tr(A) = 4 + 0 + 1 + 2 = 7$$

Tipovi matrica

Nul-matrica je matrica kojoj su svi elementi jednaki nula.

$$a_{ij} = 0, \qquad \forall i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tipovi matrica

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nula.

$$a_{ij} = 0, \qquad \forall\, i, j, \qquad i \neq j$$

Koja od slijedećih matrica je dijagonalna?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

jest nije nije jest

Tipovi matrica

Jedinična matrica je dijagonalna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nula, i svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedan.

$$a_{ij} = 0, \quad \forall\, i, j, \quad i \neq j \qquad\qquad a_{ii} = 1, \quad \forall i$$

Koja od slijedećih matrica je jedinična?

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

nije nije jest nije

Jediničnu matricu označavamo s I.

Tipovi matrica

Gornje trokutasta matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi **ispod** glavne dijagonale jednaki nula.

$$a_{ij} = 0, \qquad \forall\, i, j, \qquad i > j$$

Koja od slijedećih matrica je gornje trokutasta?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

jest nije nije jest

Tipovi matrica

Donje trokutasta matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi **iznad** glavne dijagonale jednaki nula.

$$a_{ij} = 0, \qquad \forall\, i, j, \qquad i < j$$

Koja od slijedećih matrica je donje trokutasta?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

jest nije jest jest

Operacije s matricama

Transponiranje matrice A, u oznaci A^T, je operacija koja matrici retke prevede u stupce i obrnuto.

$$a_{ij}^T = a_{ji}, \qquad \forall\, i, j$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Za operaciju transponiranja vrijedi: $(A^T)^T = A$.

Tipovi matrica

Simetrična matrica je kvadratna matrica za koju vrijedi:

$$A^T = A$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall\, i,j$$

Vizualno, elementi matrice se zrcale oko glavne dijagonale.

Koja od slijedećih matrica je simetrična?

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

jest nije jest nije

Tipovi matrica

Antisimetrična matrica je kvadratna matrica za koju vrijedi:

$$A^T = -A$$

$$a_{ij} = -a_{ji}, \qquad \forall\, i,j$$

Vizualno, elementi matrice se zrcale oko glavne dijagonale i mijenjaju predznak.
Elementi na dijagonali moraju biti jednaki nula (zašto?).

Koja od slijedećih matrica je antisimetrična?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

nije jest jest nije

Operacije s matricama

Množenje matrice A skalarom (brojem) α je operacija koja svaki element matrice a_{ij} pomnoži brojem α.

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Izlučivanje: $\begin{bmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

Operacije s matricama

Zbrajanje (oduzimanje) matrice $A \pm B$ moguće je provesti jedino ako su matrice A i B **jednakih dimenzija**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Operacije s matricama

Svojstva zbrajanja matrica, te množenja matrice skalarom.
Za matrice $A, B, C \in M_{mn}$, te $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asocijativnost zbrajanja)

2. $A + B = B + A$ (komutativnost zbrajanja)

3. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda\, A + \lambda\, B$
4. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda\, A + \mu\, A$

$\left.\begin{matrix} 3. \\ 4. \end{matrix}\right\}$ (distributivnost)

5. $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (asocijativnost množenja)

Množenje matrica

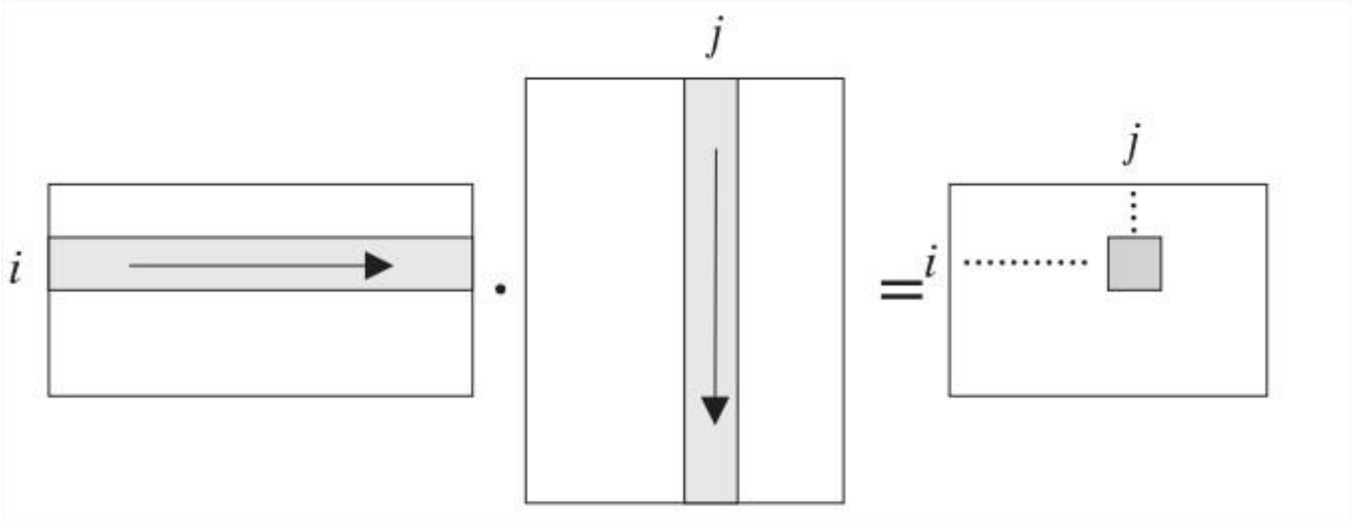
Množenje matrice $A \cdot B$ je operacija koju je moguće provesti ukoliko matrice A i B imaju tzv. „ulančane dimenzije”.

$$\underset{\substack{\text{dimenzije}\\ m \times k}}{A} \cdot \underset{\substack{\text{dimenzije}\\ k \times n}}{B} = \underset{\substack{\text{dimenzije}\\ m \times n}}{C}$$

Ukoliko matrice nemaju ulančane dimenzije, umnožak tih matrica ne postoji!

Množenje matrica

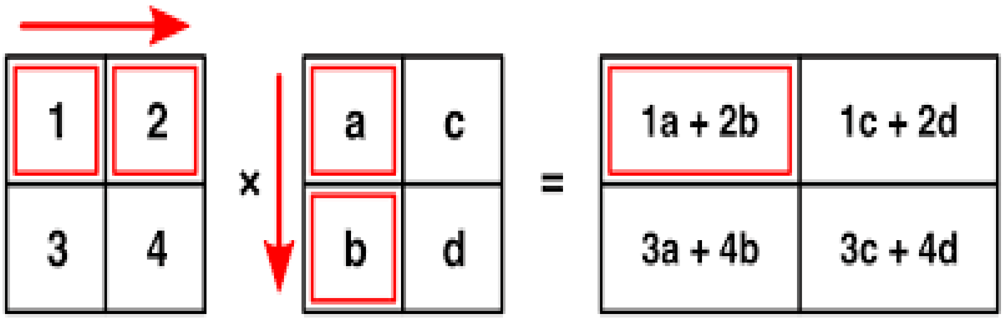
Vizualno, ulančanost dimenzija vidimo tako da je red u prvoj matrici jednako dugačak kao stupac u drugoj matrici.



Elemente reda iz prve matrice množimo elementima stupca iz druge matrice i dobivene umnoške zbrajamo.

Množenje matrica

Pokažimo kako funkcionira množenje dvije matrice dimenzija 2×2.



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Množenje matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Pomnožimo li iste matrice, ali obrnutim redoslijedom:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dakle, množenje matrica **nije komutativno**.

Množenje matrica

Za matrice $A, B, C \in M_{mn}$ (općenito) vrijedi:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (asocijativnost množenja)
2. $A \cdot B \neq B \cdot A$ (množenje nije komutativno)
3. $A \cdot (B + C) = AB + AC$
4. $(A + B) \cdot C = AC + BC$

$\left.\right\}$ (lijeva i desna distributivnost)

5. $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Dodatno, za kvadratne matricu A vrijedi:

1. $A \cdot I = I \cdot A = A$
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

Množenje matrica

Svojstva transponiranja:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Matrice

Zadatak 1: Za zadane matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ izračunajte

$$A \cdot B - 2I$$

Kojeg tipa je dobivena matrica?

$$A \cdot B - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrica je kvadratna i simetrična.

Matrična jednadžba

Zadatak 2: Za zadane matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ riješite matričnu jednadžbu

$$2X + A \cdot B = 3I$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2X + A \cdot B = 3I$$

$$2X = 3I - A \cdot B$$

$$2X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Matrična jednadžba

Zadatak 3: Za zadane matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ riješite matričnu jednadžbu

$$X^T + I \cdot B^T = B \cdot A$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X^T + B^T = B \cdot A$$

$$X^T = B \cdot A - B^T$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \; / \cdot^T$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrični polinom

Zadatak 3: Za zadane matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ i polinom

$$f(x)=x^3-2x+3,$$

odredite $f(A)$.

$$f(A)=A^3-2\,A+3\,I$$

$$A^3=A\cdot A\cdot A$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

Hvala ☺