Vjerojatnost i statistika

VJEŽBE – dio 4
ISHOD 3

Također je i dio 5 još uvijek ISHOD 3 :)

4. DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE

Slučajna varijabla je preslikavanje koje svakom rezultatu slučajnog pokusa pridružuje broj (vrijednost) po nekom pravilu. Dijelimo ih na diskretne i neprekidne.

Diskretne slučajne varijable poprimaju konačno ili prebrojivo mnogo vrijednosti (beskonačno mnogo vrijednosti koje možemo poredati u niz).

Neprekidne slučajne varijable poprimaju neprebrojivo mnogo vrijednosti, tj. poprimaju vrijednosti iz nekog intervala realnih brojeva ili iz cijelog skupa realnih brojeva.

Zapis

$$\boldsymbol{X} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \dots \\ \boldsymbol{p_1} & \boldsymbol{p_2} & \boldsymbol{p_3} \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{različite vrijednosti (od najmanje do najveće)} \\ \longrightarrow \text{pripadne vjerojatnosti (zbrojene daju 1)} \end{array}$$

zovemo **zakonom razdiobe (distribucije) diskretne** slučajne varijable X.

1. Bacamo dva simetrična novčića. Označimo s *X* broj pisama koja su pala. Odredite razdiobu slučajne varijable *X*.
2. U kutiji se nalazi 5 kuglica, od kojih je samo jedna bijela. Izvlačimo na sreću jednu po jednu kuglicu bez vraćanja. Označimo s *X* izvlačenje u kojem smo izvukli bijelu kuglicu. Odredite razdiobu slučajne varijable *X*.
3. Slučajna varijabla *X* ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ c & 2c & 2c & 3c & c^2 & 2c^2 & 7c^2+c \end{pmatrix}$$

   a) Odredite konstantu *c*.
   b) Izračunajte $P(2 \leq X \leq 5)$
   c) Izračunajte $P(X \leq 7)$
   d) Izračunajte $P(X < 1)$.
4. Bacamo simetričnu kocku. Označimo s *X* broj koji je pao na kocki. Odredite razdiobu slučajnih varijabli:
   a) X
   b) X^2
   c) $|X-3|$.

5. Ako slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.05 & 0.1 & 0.05 & 0.15 & 0.2 & 0.05 & 0.1 & 0.2 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}$$

odredite razdiobu slučajne varijable $Y = sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)$.

6. Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju istu razdiobu

$$X, Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Odredite razdiobu sljedećih slučajnih varijabli:

a) $X - Y$

b) $X \cdot Y$.

Momenti (numeričke karakteristike) diskretnih slučajnih varijabli

Ako je $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 \dots \end{pmatrix}$, tada definiramo sljedeće pojmove:

1. moment ili **OČEKIVANJE**

$$\boldsymbol{E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots = \sum x_i p_i}$$

Prema tome, očekivanje možemo shvatiti kao **prosječnu vrijednost**, odnosno težinsku aritmetičku sredinu gdje su težine jednake vjerojatnostima pojedinih realizacija slučajne varijable.

2. moment

$$\boldsymbol{E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots = \sum x_i^2 p_i}$$

DISPERZIJA (VARIJANCA)

$$\boldsymbol{D(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2}$$

Disperzija je **mjera odstupanja** (i to kvadratnih odstupanja) vrijednosti $x_1, x_2, \ldots$ slučajne varijable od prosjeka, tj. od očekivanja $E(X)$.

STANDARDNA DEVIJACIJA

$$\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{D(X)}}$$

Standardna devijacija je također **mjera odstupanja** vrijednosti $x_1, x_2, \ldots$ slučajne varijable od prosjeka, tj. od očekivanja $E(X)$.

7. Bacamo simetričnu kocku. Označimo s *X* dobitak u igri u kojoj ako padne broj manji od 5, ne dobivamo ništa, a ako padne broj veći ili jednak 5, dobivamo 50 eura. Izračunajte očekivanje i disperziju slučajne varijable.

8. Slučajna varijabla *X* ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Izračunajte $E(Y)$ i $D(Y)$ ako je $Y = X^2 - 1$.

9. Slučajna varijabla *X* ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

gdje je $a < b$. Odredite a i b ako je $E(X) = 2$ i $D(X) = 1$.

Svojstva očekivanja i disperzije

Za realne brojeve α i β te slučajne varijable X i Y imamo sljedeće:

Svojstva očekivanja

1. $\boldsymbol{E(\alpha) = \alpha}$ očekivanje konstante (broja) je sam taj broj
2. $\boldsymbol{E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)}$ svojstvo linearnosti - kod zbrajanja slučajnih varijabli očekivanje se 'zalijepi' samo na slučajne varijable, tj. 'preskače' brojeve
3. Ako su X i Y **nezavisne**, tada vrijedi $\boldsymbol{E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)}$.

Svojstva disperzije

1. $\boldsymbol{D(\alpha) = 0}$ disperzija konstante (broja) je 0
2. $\boldsymbol{D(\alpha X) = \alpha^2 D(X)}$ broj koji množi slučajnu varijablu izlazi van disperzije s kvadratom
3. $\boldsymbol{D(X + \alpha) = D(X)}$ broj koji se zbraja sa slučajnom varijablom 'nestaje' pod disperzijom
4. Ako su X i Y **nezavisne**, tada vrijedi $\boldsymbol{D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)}$.

10. Za slučajne varijable X i Y zadani su $E(X) = 5, E(Y) = 4$. Odredite $E(Z)$ ako je $Z = X - 2Y + 3$.
11. Neka je slučajna varijabla X takva da je $E(X) = 8, D(X) = 2$. Ako je $Y = 1 - 4X$, izračunajte $E(Y), D(Y)$ i $E(X^2)$.
12. Izračunajte $E(X \cdot Y)$ i $D(\sqrt{2}X - Y + 1)$, ako su nezavisne slučajne varijable *X* i *Y* zadane razdiobama
$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \mathrm{Y} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$
13. Igrač baca 2 simetrična novčića i dobiva 30 eura ako padnu dva pisma i 10 eura ako padne jedno pismo. Koliko bi igrač trebao izgubiti ako ne padne nijedno pismo da bi igra bila pravedna?
14. Provalnik je ukrao 5 ključeva od kojih samo jedan otvara vrata stana u koji pokušava provaliti. Da bi otvorio vrata, on isprobava ključeve jedan za drugim, s tim da ključ koji ne odgovara nakon pokušaja odvaja, da ga ne bi ponovo isprobavao. Koliki je očekivani broj pokušaja?

Primjeri diskretnih razdioba

GEOMETRIJSKA SLUČAJNA VARIJABLA X

Ponavljamo pokus **DOK** se ne desi neki događaj A (uspjeh). Teoretski, možda se nikad neće desiti A pa **ponavljanja mogu ići do ∞.**

X- (redni) broj pokušaja u kojem se desio događaj A

$\boldsymbol{p} = P(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja događaja A

pri *jednom* ponavljanju pokusa

$$\begin{array}{cccccc} A & \overline{A}\,A & \overline{A}\,\overline{A}\,A & \overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,A & \dots & \dots \end{array}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \dots \\ \boldsymbol{p} & (1-\boldsymbol{p})^1 \cdot \boldsymbol{p} & (1-\boldsymbol{p})^2 \cdot \boldsymbol{p} & (1-\boldsymbol{p})^3 \cdot \boldsymbol{p} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ili kraće

$$P(X = k) = (1-\boldsymbol{p})^{k-1} \cdot \boldsymbol{p}, \quad k = 1,2, \dots \infty$$

Pišemo $X \sim G(\boldsymbol{p})$

Očekivanje $E(X) = \frac{1}{p}$

Disperzija $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$

15. Čovjek ima u džepu 5 ključeva od kojih samo jedan otvara vrata njegovog stana. Ključevi su sličnog oblika i on ih ne razlikuje. Da bi otvorio vrata, on slučajno bira jedan ključ iz džepa, i ako ne uspije, vraća ga natrag. Koliki je očekivani broj pokušaja?
16. Vjerojatnost da raketa pogodi metu je 0.2. Ako se raketa ispaljuje sve dok se ne pogodi metu, izračunajte:
    a) Očekivani broj ispaljenih raketa,
    b) Vjerojatnost da će biti ispaljene barem 4 rakete.
17. Ako tim D pobijedi u svakoj igri na turniru s vjerojatnošću od 0.6 i igra dok ne izgubi, izračunajte:
    a) Očekivani broj igara koje će tim D odigrati,
    b) Vjerojatnost da će tim D odigrati najmanje 5 igara.
18. Automobil prolazi ulicom u kojoj nezavisno jedan od drugoga radi 5 semafora. Svaki zaustavlja automobil s vjerojatnošću od 0.6. Koliki je očekivani broj semafora pored kojih automobil prođe do prvog zaustavljanja?

BINOMNA SLUČAJNA VARIJABLA X

Određen broj puta ponavljamo pokus i brojimo koliko puta se desio neki događaj A (uspjeh).

X – broj pojavljivanja nekog događaja A pri $\boldsymbol{n}$ (nezavisnih) ponavljanja pokusa

$\boldsymbol{p} = P(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja događaja A

pri *jednom* ponavljanju pokusa

$$X \sim \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \binom{\boldsymbol{n}}{0} \cdot \boldsymbol{p}^0 \cdot (1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}} & \binom{\boldsymbol{n}}{1} \cdot \boldsymbol{p}^1 \cdot (1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}-1} & \binom{\boldsymbol{n}}{2} \cdot \boldsymbol{p}^2 \cdot (1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}-2} & \dots & \dots & \binom{\boldsymbol{n}}{n} \cdot \boldsymbol{p}^n \cdot (1-\boldsymbol{p})^0 \end{array} \right)$$

Ili kraće

$$P(X = k) = \binom{\boldsymbol{n}}{k} \cdot \boldsymbol{p}^k \cdot (1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}-k}, \qquad k = 0,1,2,\dots,\boldsymbol{n}$$

3. broj razmještaja k uspjeha u nizu duljine n

1. na k mjesta u nizu množimo vjerojatnost uspjeha p

2. na preostalih n-k mjesta je vjerojatnost neuspjeha 1-p

Pišemo $X \sim B(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$

Očekivanje $E(X) = np$

Disperzija $D(X) = npq, \quad (q = 1 - p)$

19. Pretpostavimo da telefoniramo u vrijeme kada je svaki četvrti telefonski broj zauzet. Kolika je vjerojatnost da će se od 12 poziva uspostaviti točno 3 veze?
20. Robot poslužuje 12 strojeva istog tipa. Vjerojatnost da jednom stroju treba specijalan dodatak u toku jednog sata iznosi 1/3. Kolika je vjerojatnost da u toku jednog sata, specijalan dodatak treba na 4 stroja?
21. Neka operacija uspijeva u 75% slučajeva. Treba naći vjerojatnost da baš 75% od 8 pacijenata preživi tu operaciju.
22. Vjerojatnost rađanja dječaka iznosi 0.515.
    a) Ako u jednoj obitelji ima 8 djece, kolika je vjerojatnost da je broj dječaka veći od 2, a manji od 5?
    b) Koliko najmanje djece treba imati jedna obitelj da bi s vjerojatnošću od najmanje 0.75 imala najmanje 1 muško dijete?
23. Velika serija olovaka ima 10% škarta. Koliko najmanje olovaka treba uzeti odjednom pa da vjerojatnost da među njima izvučemo barem jednu lošu bude veća od 0.5?
24. U krug je upisan kvadrat. Kolika je vjerojatnost da od 4 točke, slučajno ubačene u krug, samo jedna točka padne unutar kvadrata?
25. U krug je upisan jednakostranični trokut. Kolika je vjerojatnost da od 5 slučajno bačenih točaka u krug nijedna ne padne u trokut?
26. Izračunajte vjerojatnost da se u 5 nezavisnih bacanja triju kocki 2 puta pojave točno 3 jedinice?

Bernoullijeva slučajna varijabla

Poprima samo dvije vrijednosti i to 0 i 1.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Očekivanje: $E(X) = p.$

Disperzija: $D(X) = p(1-p).$

27. Stroj izbacuje loš proizvod u 5% slučajeva. Kontrolor uzima 80 proizvoda. Koliki je očekivani broj dobrih proizvoda među tih 80?
28. Na dodjeli diplome 42 studenta bace svoje kape u zrak. Ako se kape izmiješaju i svaki student slučajno bira jednu, koliki je očekivani broj studenata koji će izabrati svoju kapu?
29. Dijeli se 25 različitih tipova kupona za nabavku elektroničkih uređaja. Pri podijeli kupona jednako je vjerojatno da ćemo dobiti bilo koji od 25 tipova. Ako smo dobili 10 kupona, koliki je očekivani broj različitih tipova među njima?

POISSONOVA SLUČAJNA VARIJABLA X

U nekoj jedinici vremena, prostora,... brojimo koliko puta se desio neki događaj A (uspjeh).

X – broj pojavljivanja nekog događaja A (uspjeha) **<u>u nekoj jedinici</u>** vremena, prostora, ...

Intenzitet $\boldsymbol{\lambda}$ – *PROSJEČAN* broj pojavljivanja događaja A **<u>u toj jedinici</u>**

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots \\ \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ili kraće

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\dots\ \infty$$

Pišemo $X \sim P(\lambda)$

Očekivanje $E(X) = \lambda$

Disperzija $D(X) = \lambda$

30. Neki elektronski uređaj sastoji se od 1000 elemenata. Vjerojatnost kvara jednog elementa u jednoj godini rada iznosi 0.001 i ona ne zavisi od rada drugih elemenata.
    a) Kolika je vjerojatnost da uređaj radi bez kvara 1 godinu?
    b) Kolika je vjerojatnost da su najviše 2 elementa u kvaru u 1 godini?
    c) Koliki je očekivani broj elemenata koji će se pokvariti u 5 godina?
31. Kazalište godišnje ima 1095 predstava. Pretpostavimo da je broj predstava u bilo kojem vremenskom intervalu slučajna varijabla koja ima Poissonovu razdiobu.
    a) Kolika je vjerojatnost da u jednom danu daju 4 predstave?
    b) Kolika je vjerojatnost da u jednom danu ne daju više od 2 predstave?
32. Vjerojatnost da pretplatnik nazove telefonsku centralu u toku jednog sata iznosi 0.01. Centrala poslužuje 300 pretplatnika. Kolika je vjerojatnost da će u toku jednog sata centralu nazvati najmanje 4 pretplatnika?
33. Ako čovjek sjedi na balkonu, komarci ga bodu s intenzitetom od 0.02 uboda po sekundi, a kada uđe u sobu, onda se intenzitet smanji na 0.005 uboda po sekundi. Ako je čovjek proveo 10 minuta na balkonu, a zatim 30 minuta u sobi, koliko je očekivani broj uboda za to vrijeme?

Zadaci za vježbu

34. U kutiji su 3 bijele i 3 crne kuglice. Izvlači se po 1 kuglica, bez vraćanja, sve dok se ne izvuče bijela kuglica. Označimo s *X* izvlačenje u kojem smo izvukli bijelu kuglicu. Odredite razdiobu slučajne varijable *X*.
35. Dva strijelca nezavisno jedan od drugog gađaju po jednom u istu metu. Vjerojatnost pogotka za prvog strijelca iznosi 0.7, a za drugog 0.6. Označimo sa *X* broj pogodaka u metu.
    a) Odredite razdiobu slučajne varijable *X*.
    b) Izračunajte $P(X \leq 1)$.
36. Slučajna varijabla *X* ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0.3 & 0.2 & 0.05 & 0.25 & p \end{pmatrix}.$$

    a) Odredite *p*.
    b) Izračunajte $P(X > 9)$.
    c) Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = 2 - X$.
    d) Odredite razdiobu slučajne varijable $Z = 2^{X-3}$.

Zadaci za vježbu

37. Slučajna varijabla X zadana je razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = 2|X| - 3$.

38. Nezavisne slučajne varijable X i Y zadane su razdiobama:

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \mathrm{Y} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Odredite razdiobe slučajnih varijabli

a) $X + 2Y$.

b) $X^2 Y$.

39. Izračunajte $E(X), D(X), \sigma(X), E(2X - 3)$ ako je X zadana razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Zadaci za vježbu

40. Za nezavisne slučajne varijable X i Y je zadano $E(X) = 6, E(Y) = -1, D(X) = 2, D(Y) = 1$. Ako je $Z = 3X - 2Y + 1$, izračunajte $E(Z), D(Z)$.
41. Simetrični novčić bacamo 2 puta. Neka je slučajna varijabla X jednaka 1 akoprvo padne pismo, a 0 inače. Slučajna varijabla Y neka je jednaka 1 ako pismo padne u oba bacanja, a 0 inače. Izračunajte $E(Z), D(Z)$ ako je $Z = X + Y$.
42. Simetrični novčić bacamo 3 puta. Označimo sa X broj pojavljenih pisama, a sa Y duljinu najdužeg niza uzastopno pojavljenih pisama. Izračunajte $E(X), E(Y), D(X), D(Y), E(XY)$.
43. Bacamo 2 simetrične kocke. Označimo sa X veći od brojeva koji je pao na kockama. Izračunajte $E(X), D(X)$.
44. Iz kutije u kojoj su 2 bijele i 3 crne kuglice izvlače se slučajno 2 kuglice odjednom. Izračunajte očekivanje broja izvučenih bijelih kuglica.
45. Označimo sa X_i broj bodova koje jednim hicem postiže strijelac $S_i, i = 1,2$. Izračunajte očekivanu broj bodova za svakog strijelca ako je

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Koji strijelac bolje gađa?

Zadaci za vježbu

46. Vjerojatnost da vafer sadrži veliku česticu nečistoće je 0.01. Ako su vaferi nezavisni, kolika je vjerojatnost da će se analizirati točno 125 vafera prije nego se uoči velika čestica nečistoće?
47. Vjerojatnost uspješnog optičkog poravnavanja sklopa optičkom uređaju za pohranu podataka je 0.8 i poravnavanja su nezavisna.
    a) Kolika je vjerojatnost da će se dogoditi točno 4 poravnavanja do uspjeha?
    b) Kolika je vjerojatnost da će se dogoditi najmanje 4 poravnavanja do uspjeha?
    c) Kolika je vjerojatnost da će se dogoditi najviše 4 poravnavanja do uspjeha?
48. Vjerojatnost uspostave poziva popularnoj radio stanici je 0.02. Ako su pozivi nezavisni, izračunajte:
    a) Vjerojatnost da ćemo uspostaviti vezu u desetom pozivu,
    b) Vjerojatnost da će biti potrebno više od pet poziva dok ne uspostavimo vezu,
    c) Očekivani broj poziva potreban da se uspostavi veza?
49. Jedan automat daje 10% škarta. Ako automat radi ujednačeno, kolika je vjerojatnost da u slučajnom uzorku od 7 proizvoda budu 3 loša proizvoda?

Zadaci za vježbu

50. Ispit se sastoji od 25 pitanja sa po 4 odgovora. Ako student pogađa svaki odgovor, kolika je
    a) vjerojatnost da će odgovoriti točno na točno 10 pitanja?
    b) vjerojatnost da će odgovoriti točno na manje od 5 pitanja?
51. Aviokompanija zna da na let ne dođu svi putnici koji su rezervirali kartu pa za let koji ima 120 mjesta proda 125 karata. Vjerojatnost da putnik ne dođe na let je 0.10 i putnici se ponašaju nezavisno.
    a) Kolika je vjerojatnost da će svaki putnik koji dođe na let imati slobodno mjesto?
    b) Kolika je vjerojatnost da će avion poletjeti sa slobodnim mjestima?
52. Vjerojatnost da strijelac promaši cilj pri jednom gađanju iznosi 0.8. Koliko najmanje gađanja treba izvesti da bi s vjerojatnošću ne manjom od 0.9 cilj bio pogođen barem jednom?
53. Koliko najmanje puta treba baciti istodobno 3 kocke da bi se s vjerojatnošću ne manjom od 0.6 moglo očekivati da će se barem jednom pojaviti suma 15?
54. U krug je upisan jednakostranični trokut. Izračunajte vjerojatnost da će se od 10 na sreću odabranih točaka unutar kruga barem dvije naći unutar trokuta.

Zadaci za vježbu

55. Neka je X slučajna varijabla koja ima binomnu razdiobu s parametrima n i p. Odredite parametre n i p ako je poznato E(X)=12 i D(X)=4.
56. Elektronski uređaj sastoji se od 400 mikroelemenata. Vjerojatnost kvara svakog mikroelementa u jednoj godini rada iznosi 0.01 i ne zavisi od rada ostalih mikroelemenata.
    a) Kolika je vjerojatnost da uređaj radi bez kvara jednu godinu?
    b) Koliki je očekivani broj mikroelemenata koji će se pokvariti u 3 mjeseca?
57. Ako se poruke objavljuju na forumu po Poissonovom zakonu s intezitetom od 5 poruka po satu, izračunjate.
    a) Vjerojatnost da se na forumu objavi 5 poruka u jednom satu;
    b) Vjerojatnost da se na forumu objave manje od 2 poruke u pola sata.
58. Ako je broj grešaka u knjizi slučajna varijabla koja ima Poissonovu razdiobu s intenzitetom od 0.01 grešaka po strani, kolika je vjerojatnost da će na 100 strana knjige biti manje od 4 greške?

Rješenja

4.1. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$

4.2. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$

4.3.
a) c=0.1
b) $P(2 \le X \le 5) = 0.71$
c) $P(X \le 7) = 1$
d) $P(X < 1) = 0$

4.4.
a) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

b) $X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

c) $|X-3| \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/4 & 1/6 \end{pmatrix}$

4.5. $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.15 & 0.55 & 0.3 \end{pmatrix}$

4.6. a) $X-Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$

b) $XY \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ 1/9 & 2/9 & 2/9 & 1/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$

4.7. E(X)=50/3 eura, D(X)=5000/9

4.8. E(Y)=0.4, D(Y)=1.84

4.9. a=1, b=3

4.10. E(Z)=0

4.11. E(Y)=-31, D(Y)=32, $E(X^2)=66$

4.12. E(XY)=7/3, $D(\sqrt{2}X-Y+1)=43/36$

4.13. Igrač treba izgubiti 50 eura.

4.14. X=broj pokušaja otvaranja vrata, E(X)=3

4.15. X=broj pokušaja otvaranja vrata, E(X)=5

4.16. X=broj ispaljenih raketa

a) E(X)=5

b) $P(X \geq 4)=0.512$

4.17. X=broj igara koje je odigrao tim D

a) E(X)=2.5

b) $P(X \geq 5)=0.1296$

4.18. X=broj semafora pored kojih automobil prođe, E(X)=0.6598
4.19. X=broj uspostavljenih veza, E(X)=0.00035
4.20. X=broj specijaliziranih dodataka u jednom satu, P(X=4)=0.2384
4.21. X=broj pacijenata koji prežive operaciju, P(X=6)=0.3114
4.22. X=broj dječaka u obitelji

a) $P(2 < X < 5) = 0.4778$

b) n=2

4.23. n=7
4.24. X=broj točaka koje padnu unutar kvadrata, P(X=1)=0.122
4.25. X=broj točaka koje padnu unutar trokuta, P(X=0)=0.0694
4.26. X=broj bacanja u kojima su pale 3 jedinice, P(X=2)=0.000211
4.27. X=broj dobrih proizvoda, E(X)=76
4.28. X=broj studenata koji su odabrali svoju kapu, E(X)=1
4.29. X=broj različitih tipova kupona, E(X)=8.38
4.30. X=broj elemenata koji se pokvare u 1 godini

a) $P(X = 0) \approx 0.3678$

b) $P(X \leq 2) \approx 0.9197$

c) Y=broj elemenata koji se pokvare u 5 godina, $E(Y) \approx 5$

4.31. X=broj predstava koje kazalište daje u jednom danu

a) $P(X = 4) = 0.168$

b) $P(X \leq 2) = 0.4232$

4.32. X=broj pretplatnika koji nazovu centralu u toku 1 sata, $P(X \geq 4) = 0.3527$

4.33. X_1=broj uboda na balkonu u 10 min, X_2=broj uboda u sobi u 30 min, $E(X_1 + X_2)=21$

Rješenja zadataka za vježbu

4.34. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 3/10 & 3/20 & 1/20 \end{pmatrix}$

4.35. a) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.12 & 0.46 & 0.42 \end{pmatrix}$

b) 0.58

4.36. a) 0.2

b) 0

c) $Y \sim \begin{pmatrix} -7 & -5 & -3 & 0 & 2 \\ 0.2 & 0.25 & 0.05 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$

d) $Z \sim \begin{pmatrix} 1/8 & 1/2 & 4 & 16 & 64 \\ 0.3 & 0.2 & 0.05 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix}$

4.37. $Y \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$

4.38. a) $X+2Y \sim \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ 0.02 & 0.09 & 0.26 & 0.33 & 0.3 \end{pmatrix}$

b) $X^2Y \sim \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ 0.07 & 0.21 & 0.72 \end{pmatrix}$

4.39. E(X)=5.2, D(X)=5.16, $\sigma(X)=2.27$, E(2X-3)=7.4

4.40. E(Z)=21, D(Z)=22

4.41. E(Z)=3/4, D(Z)=11/16

4.42. E(X)=3/2, E(Y)=11/8, D(X)=3/4, D(Y)=47/64, E(XY)=22/8

4.43. E(X)=4.47, D(X)=1.97

4.44. 0.8

4.45. $E(X_1)=2.1$, $E(X_2)=2.2$; S_2 bolje gađa

4.46. 0.0028

4.47. a) 0.0064

b) 0.008

c) 0.9984

4.48. a) 0.0166

b) 0.9039

c) 50

4.49. 0.0229

4.50. a) 0.0416
b) 0.2137

4.51. a) 0.9961
b) 0.9885

4.52. n=11

4.53. n=20

4.54. 0.9612

4.55. p=2/3, n=18

4.56. a) ≈ 0.0183
b) 1

4.57. a) 0.1754
b) 0.2873

4.58. 0.981