2.1 Događaji

slučajni pokus – pokus čiji ishod nije unaprijed određen.

elementarni događaj – ishod slučajnog pokusa

skup svih mogućih ishoda (elementarnih događaja) označavamo slovom Ω.

Primjer 2.1.

Bacamo jednu igraću kocku čije su strane označene brojevima od 1 do 6. Odredi elementarne događaje, skup Ω te događaje

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pao je neparni broj}\} \\ B &= \{\text{pao je broj veći od 3}\} \\ C &= \{\text{pao je parni broj manji od 6}\} \\ D &= \{\text{pao je prost broj}\}. \end{aligned}$$

Siguran i nemoguć događaj

Ω – događaj koji se uvijek ostvaruje

$\emptyset$ – nemoguć događaj, nikad se ne ostvaruje

Primjer 2.2.

Košarkaš izvodi slobodno bacanje tri puta. Za svako slobodno bacanje bilježimo je li postignut koš (+) ili ne (−). Odredi Ω, elementarne događaje te događaje

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{košarkaš je postigao dva koša}\}, \\
B &= \{\text{košarkaš je pogodio koš u trećem bacanju}\}, \\
C &= \{\text{košarkaš je barem jednom pogodio i barem jednom promašio koš}\}, \\
D &= \{\text{košarkaš je pogodio koš dva puta zaredom}\}.
\end{aligned}
$$

Uspoređivanje događaja

Događaj A **povlači** događaj B ako realizacija od A povlači realizaciju od B.

Događaj B sadrži sve elementarne događaje koji ulaze u događaj A. Pišemo $A \subset B$ ili $A \Longrightarrow B$.

Primjer 2.3.

Istovremeno bacamo pet novčića. Označimo događaje

$$A = \{\text{najviše jedan novčić pokazuje glavu}\},$$
$$B = \{\text{barem tri novčića pokazuju pismo}\}.$$

Da li događaj A povlači događaj B? Da li događaj B povlači događaj A?

Primjer 2.4.

Istovremeno bacamo dvije kocke. Označimo događaje

$$\begin{aligned} A &= \{\text{zbroj brojeva na kockama jednak je } 10\}, \\ B &= \{\text{oba broja veća su od } 3\}. \end{aligned}$$

Dokaži da događaj A povlači događaj B. Da li događaj B povlači događaj A?

Ekvivalentni i disjunktni događaji

Ukoliko vrijedi $A \subset B$ i $B \subset A$, onda kažemo da su A i B **ekvivalentni** ili **jednaki** i pišemo $A = B$. Ekvivalentni događaji sastoje se od istih elementarnih događaja.

Događaji A i B su **disjunktni**, ako se istovremeno ne mogu ostvariti i jedan i drugi. Kažemo još da se A i B **međusobno isključuju**. Tada A i B nemaju zajedničkih elementarnih događaja. Pišemo $A \cap B = \emptyset$.

Primjer 2.5.

Svaki od četiri strijelca gađa istu metu jedanput. Promotrimo događaje

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{tri strijelca su pogodila metu}\},\\
B &= \{\text{jedan strijelac je promašio metu}\},\\
C &= \{\text{dva strijelca su pogodila, a dva promašila metu}\}.
\end{aligned}
$$

Koji od ovih događaja povlače neki drugi, koji su ekvivalentni, a koji se međusobno isključuju?

Algebra događaja

Unija događaja. Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja A, B naziva se unija ili zbroj (suma) događaja i označava s $A \cup B$, $A + B$, A ili B.

Presjek događaja. Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila oba događaja A i B naziva se presjek ili umnožak (produkt) događaja i označava s $A \cap B$, AB, A i B.

Primjer 2.6.

Bacamo jednu kocku. Istaknimo događaje

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pao je neparan broj}\} \\ B &= \{\text{pao je prost broj}\}. \end{aligned}$$

Odredi događaje $A \cup B$ i $A \cap B$.

Presjek i unija više događaja

Unija n događaja je događaj

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Presjek n događaja je događaj

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

koji se ostvaruje ako se ostvario svaki od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Razlika događaja. Komplement događaja.

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvari događaj A, a da se ne ostvari događaj B, nazivamo razlika događaja A i B i označavamo s $A \backslash B$, $A - B$.

Događaj $\Omega \backslash A$ nazivamo komplementom ili suprotnim događajem događaja A. On se ostvaruje ako i samo ako se A nije ostvario. Označavamo ga s $\overline{A}$ ili s A^c.

Vrijedi $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ i $\overline{\overline{A}} = A$.

de Morganovi zakoni

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

Vjerojatnost

Vjerojatnost je preslikavanje $P : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$ definirano na algebri događaja $\mathcal{F}$, koje ima svojstva

- $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ (**normiranost**),
- ako je $A \subset B$, onda vrijedi $P(A) \leq P(B)$ (**monotonost**),
- ako su A i B disjunktni događaji, onda je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (**aditivnost**).

Broj $P(A)$ nazivamo vjerojatnost događaja A.

Vjerojatnost komplementa

Za svaki događaj A vrijedi $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Vjerojatnost unije

Za bilo koja dva događaja vrijedi
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Primjer 2.7.

Neka su A i B događaji takvi da je $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Izračunaj vjerojatnosti $P(A \cap B)$, $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$.

Konačni vjerojatnosni prostor $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

$$p_1 = P(\{\omega_1\}), \quad p_2 = P(\{\omega_2\}), \quad \dots, \quad p_n = P(\{\omega_n\}).$$

$$p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ \dots,\ p_n > 0, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \cdots + P(\{\omega_n\}).$$

$A \in \mathcal{F}$

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}\}.$$

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots p_{i_m}.$$

Bacanje simetričnog novčića ili kocke

Simetrični novčić. Dva su elementarna događaja: $\omega_1 = \mathrm{P}$, $\omega_2 = \mathrm{G}$. Pod simetričnim novčićem podrazumijevamo ispravan novčić kod kojeg je način bacanja uobičajen, pa je prirodno pretpostaviti da su vjerojatnosti pojavljivanja obaju događaja jednake:

$$p_1 = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}, \quad p_2 = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}.$$

Simetrična kocka. Za simetričnu kocku prirodno je uzeti $p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$, za svaku od šest mogućnosti na koje kocka može pasti.

Primjer 2.8.

Bacamo simetričnu kocku. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pao je neparan broj}\} \\ B &= \{\text{pao je broj manji od } 5\}. \end{aligned}$$

Bacanje dvaju novčića

Ovdje imamo četiri elementarna događaja, iako na prvi pogled postoje tri različita ishoda: dva pisma, pismo i glava, te dvije glave:

	1. novčić	2. novčić
ω_1	P	P
ω_2	P	G
ω_3	G	P
ω_4	G	G

Kako bismo lakše razlikovali elementarne događaje ω_2 i ω_3, možemo zamisliti da bacamo dva različita novčića ili da jedan novčić bacamo dva puta te da razlikujemo bacanja. Sva četiri elementarna događaja su jednako vjerojatna, tj. vrijedi

$$p_1 = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4},\ p_2 = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4},\ p_3 = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4},\ p_4 = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}.$$

Bacanje dviju kocki

Postoji 36 elementarnih događaja. Da bismo razlikovali događaje poput $(3, 4)$ i $(4, 3)$, možemo zamisliti da su kocke obojene različitim bojama ili da umjesto dvije kocke istovremeno, bacamo jednu kocku dva puta tako da znamo što je rezultat prvog, a što rezultat drugog bacanja. Ako su kocke simetrične, prirodno je pretpostaviti da su svi elementarni događaji jednako vjerojatni te da vjerojatnost njihovog pojavljivanja iznosi $\frac{1}{36}$.

Primjer 2.9. Bacamo dvije simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost da je zbroj brojeva na kockama jednak 8?

Primjer 2.10.

Slučajno odabiremo broj iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 89, 90\}$. Kolika je vjerojatnost da je odabrani broj djeljiv s 3? Kolika je vjerojatnost da je odabrani broj djeljiv s 5? Kolika je vjerojatnost da je odabrani broj djeljiv s 3 ili s 5?

Modeli s elementarnim događajima koji nisu jednako vjerojatni

Nesimetrični novčić. Još uvijek postoje dva elementarna događaja $\omega_1 = \mathrm{P}$, $\omega_2 = \mathrm{G}$. Međutim, zbog nesimetričnosti novčića jedna njegova strana, recimo P, pojavljuje se češće nego druga. U tom slučaju je $p_1 > p_2$. Napomenimo još da ćemo pod pojmom novčića podrazumijevati simetrični novčić, a ukoliko novčić nije takav to ćemo posebno naglasiti.

Bacanje dvaju novčića, drugi model. Po pisanim dokumentima, veliki francuski matematičar i enciklopedist d'Alembert (1717-1783) u ovom je primjeru postavio samo tri elementarna događaja:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{\text{pala su dva pisma}\}, \\ \omega_2 &= \{\text{palo je jedno pismo i jedna glava}\}, \\ \omega_3 &= \{\text{pale su dvije glave}\} \end{aligned}$$

Ovaj pristup je također ispravan. Međutim, vjerojatnosti ovih elementarnih događaja nisu jednake, nego mora biti

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}.$$

Primjer 2.11. U košari se nalazi jedna jabuka, dvije kruške, dvije naranče i jedna mandarina. Ivo slučajno odabire jednu voćku iz košare. Odredi vjerojatnost sljedećih događaja:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{nije odabrana kruška}\}, \\ B &= \{\text{odabrana je kruška, naranča ili mandarina}\}, \\ C &= \{\text{odabran je limun}\}. \end{aligned}$$

Pretpostavljamo da je vjerojatnost odabira bilo koje voćke jednako vjerojatna.

Primjer 2.12

Dva prijatelja, Mirko i Slavko igraju stolni tenis. Slavko je nešto bolji stolnotenisač i u pravilu, od pet mečeva on pobjeđuje Mirka u tri meča, pa možemo pretpostaviti da je vjerojatnost pobjede Slavka u svakom pojedinom meču jednaka 0.6. Mirko i Slavko su odlučili igrati mečeve zaredom sve dok Mirko ne pobjedi, ali će odigrati najviše pet mečeva. Opišite vjerojatnosni prostor te izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{Mirko će pobjediti Slavka u prvom ili drugom meču}\},\\
B &= \{\text{Mirko će pobijediti Slavka nakon drugog meča}\},\\
C &= \{\text{Mirko neće pobijediti Slavka}\}.
\end{aligned}$$