2. VJEROJATNOST
Događaji

ω – elementarni događaj (bilo koji ishod slučajnog pokusa)

Ω – sigurni događaj (skup svih elementarnih događaja)

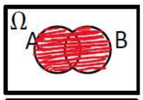
$A, B, C, \dots$ – događaji (podskupovi od Ω, sastoje se od elementarnih događaja)

$\emptyset$ – nemoguć događaj

Operacije na događajima

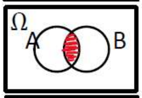
ili

$A \cup B$ = {ostvario se **barem jedan** od događaja A i B}



i

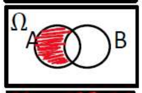
$A \cap B$ = {ostvarila su se **oba** događaja A i B}



bez

$A \setminus B$ = {**ostvario se događaj A, a nije se ostvario B**}

Vrijedi $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.



$\overline{A}$ = {**nije** se ostvario događaj A} (suprotan/komplement od A)

1. Bacamo jednu kocku. Odredite elementarne događaje u događajima:
   a) A - {pao je prost broj},
   b) B - {pao je broj djeljiv s 3},
   c) C - {pao je broj koji je djelitelj broja 10}.

kocke $\rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) $A = \{2, 3, 5\}$

b) $B = \{3, 6\}$

c) $C = \{1, 2, 5\}$

2. Proizvodi koji silaze s proizvodne trake označavaju se slovom D-dobri i L-loši. Označavanje traje dok se ne označe 2 loša proizvoda uzastopno ili dok se ne izvrše ukupno 4 oznake. Registrira se dobiveni niz slova D i L. Odredite prostor elementarnih događaja i prikažite pomoću njih događaje
   a) A - {označeno je više D nego L},
   b) B - {označavanje je stalo u prva tri koraka}.

prostor elementarnih događaja (skup) $\Omega = \{LL, DLL, DDLL, DLDL, DDDD, LDLD, LDDD, DLDD, DDLD, DDDL, LDDL, LDLL\}$

a) $A = \{LDDD, DLDD, DDLD, DDDL, DDDD\}$

b) unutar prva tri (NE u trećem)

$B = \{LL, DLL\}$

3. Bacamo dva novčića. Odredite elementarne događaje u događajima:
   a) A - {glava na prvom novčiću}, B - {pismo na prvom novčiću},
   b) C - {barem jedna glava}, D - {barem jedno pismo},
   c) B ∪ D, B ∩ D,
   d) A ∪ B, A ∩ B,
   e) C ∪ D, C ∩ D.

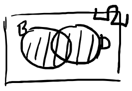
2 novčića: $\Omega = \{PP, GG, PG, GP\}$

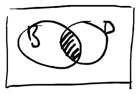
$\underset{\{P,G\}}{\underline{2}} \cdot \underline{2} = 4$ mogućnosti

a) $A = \{GG, GP\}$ $\quad B = \{PP, PG\}$

b) $C = \{GG, GP, PG\}$ $\quad D = \{PP, PG, GP\}$

c) $B \overset{ili}{\cup} D = \{PP, PG, GP\} = D$ $\quad B \overset{i}{\cap} D = \{PP, PG\} = B$





d) $A \overset{ili}{\cup} B = \{GG, GP, PP, PG\} = \Omega$ $\quad A \overset{i}{\cap} B = \emptyset$

e) $C \overset{ili}{\cup} D = \{GG, GP, PG, PP\} = \Omega$ $\quad C \overset{i}{\cap} D = \{PG, GP\}$

4. Bacamo dvije kocke. Odredite elementarne događaje u događajima:
   a) A -{zbroj brojeva na kockama je neparan},
   b) B - {barem jedna kocka je pala na 1},
   c) C - {zbroj brojeva na kockama je 5},
   d) B ∩ C,
   e) A ∩ B,
   f) $\bar{A} \cap B$

(1, 1)

2 kocke $\rightarrow$ $\underset{1.}{\underline{6}} \cdot \underset{2.}{\underline{6}} = 36$ mogućih el. događaja

1. 2. kocke

$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16,$
$21, 22, 23, 24, 25, 26,$
$31, 32, 33, 34, 35, 36$
$41, 42, 43, 44, 45, 46,$
$51, 52, 53, 54, 55, 56,$
$61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

a) $A = \{$zbroj neparan$\}$ 1 paran i 1 neparan

$A = \{12, 14, 16,$
$21, 23, 25,$
$32, 34, 36,$
$41, 43, 45,$

32, 34, 36,
41, 43, 45,
52, 54, 56,
61, 63, 65}

1 ili više jedinica

b) $B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 31, 41, 51, 61\}$

c) $C = \{41, 23, 32, 14\}$

d) $B \overset{i}{\cap} C = \{14, 41\}$ zajednički

e) $A \overset{i}{\cap} B = \{12, 14, 16, 21, 41, 61\}$

f) $\overline{A} \overset{i}{\cap} B = \{11, 13, 15, 31, 51\}$

zbroj paran

5. Dva strijelca S_1 i S_2 gađaju u jednu metu, svaki sa po jednim metkom. Neka su događaji A_i= {metu je pogodio strijelac S_i}, $i = 1,2$.
   a) Odredite prostor elementarnih događaja.
   b) Pomoću A_i prikažite A - {meta je pogođena točno jednom}.
   c) Pomoću A_i prikažite B - {meta nije pogođena}.
   d) Kakav je događaj C - {meta je pogođena sa 3 metka}?
   e) Što znači događaj D - $(\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_1 \cap A_2)$?

2 strijelca gađaju svaki s 1 metkom

$A_1 = \{$metu je pogodio $S_1\}$

$A_2 = \{$metu je pogodio $S_2\}$

0 - promašaj
1 - pogodak

a) prostor el. dog. $\Omega = \{\overset{1.\,2.\,st.}{00}, 11, 01, 10\}$

$\overline{A_1} \overset{i}{\cap} \overline{A_2}$ $A_1 \overset{i}{\cap} A_2$ $\overline{A_1} \cap A_2$ $A_1 \overset{i}{\cap} \overline{A_2}$

b) $A = (\overline{A_1} \cap A_2) \overset{ili}{\cup} (A_1 \cap \overline{A_2})$

c) $B = \overline{A_1} \overset{i}{\cap} \overline{A_2}$

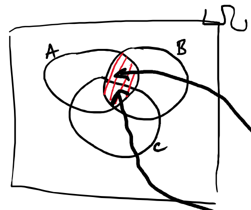
d) $C = \emptyset$ nemoguć događaj

Ω - siguran događaj

e) Što znači događaj D = $(\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_1 \cap A_2)$?

D = { barem jedan strijelac je pogodio }

6. Neka su A, B i C događaji. Koristeći se operacijama s događajima, napišite izraze za sljedeće događaje:
   a) Ostvarila su se sva tri događaja,
   b) Ostvarila su se točno dva događaja,
   c) Ostvarila su se barem dva događaja,
   d) Nije se ostvario nijedan događaj.



A, B i C događaji

a) $A \overset{i}{\cap} B \overset{i}{\cap} C$

$A \overset{i}{\cap} B \to A \cap B \cap C$

$\to A \cap B \cap \overline{C}$

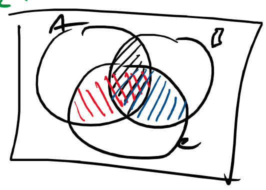
b) $(A \overset{i}{\cap} B \overset{i}{\cap} \overline{C}) \overset{ili}{\cup} (A \cap \overline{B} \cap C) \overset{ili}{\cup} (\overline{A} \cap B \cap C)$

c) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

d) $\overline{A} \overset{i}{\cap} \overline{B} \overset{i}{\cap} \overline{C}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

NIJE DOBRO JER SE VIŠE PUTA SPOMINJE NEKI DIO



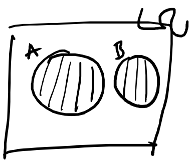
Vjerojatnost

Vjerojatnost je funkcija koja svakom događaju pridružuje realan broj te ima određena svojstva.

Naime, vjerojatnost je preslikavanje $P : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ definirano na algebri događaja $\mathcal{F}$, za koje vrijedi:

1) $P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0,$ (normiranost)

2) ako $A \subset B$, tada $P(A) \leq P(B)$, (monotonost)

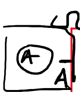


3) Ako su ***A i B*** **disjunktni događaji (tj. ako nemaju zajedničkih elemenata)**, tada vrijedi

$$P(A \overset{ili}{\cup} B) = P(A) + P(B). \qquad \text{(aditivnost)}$$

Broj $P(A)$ zovemo vjerojatnošću događaja A.

Svojstva:



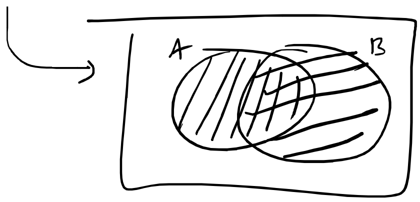
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ **vjerojatnost komplementa**

$P(A \overset{ili}{\cup} B) = P(A) + P(B) - P(A \overset{i}{\cap} B)$ **vjerojatnost unije**

broj elem.

$c(\overline{A}) = c(U) - c(A)$

svi



7. Ako su A i B događaji, $P(A) = 0.6, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$, izračunajte vjerojatnosti $P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(A \cap B), P(\bar{A} \cap B), P(A \cap \bar{B})$.

$P(A) = 0.6$

$P(B) = 0.4$

$P(A \cup B) = 0.8$

$P(\bar{A}) = ?$ $\quad \boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)} = 1 - 0.6 = 0.4$

$P(\bar{B}) = ?$ $\quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$

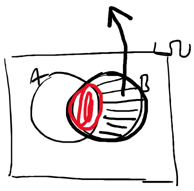
$P(A \cap B) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

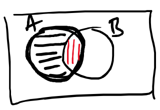
$$0.8 = 0.6 + 0.4 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$\boxed{P(\overbrace{\bar{A} \cap B}^{B \setminus A}) = P(B) - P(A \cap B)} = 0.4 - 0.2 = 0.2$$



$$\boxed{P(\overbrace{A \cap \bar{B}}^{A \setminus B}) = P(A) - P(A \cap B)} = 0.6 - 0.2 = 0.4$$



8. Ako su A i B događaji, $P(A \cup B) = 0.8, P(A \cap B) = 0.2, P(\bar{A}) = 0.6$, izračunajte vjerojatnosti $P(A), P(B), P(A \setminus B), P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

DZ

$P(A \cup B) = 0.8$

$P(A \cap B) = 0.2$

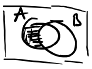
$P(\bar{A}) = 0.6$

$P(A) = ?$ $\quad \boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A})} = 1 - 0.6 = 0.4$

$P(B) = ?$ $\quad \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$
$= 0.8 - 0.4 + 0.2 = 0.6$

$P(A \overset{\text{bez}}{\setminus} B) = ?$ $\quad \boxed{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)} = 0.4 - 0.2 = 0.2$



$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = ?$ $\quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

de Morgan
→ kad su svugdje komplementi

pravilo komplementa
↓
$P(\bar{*}) = 1 - P(*)$

Vjerojatnosni prostor koji se sastoji od konačno mnogo elementarnih događa zovemo **konačnim vjerojatnosnim prostorom**. Ako je $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}}$, vjerojatnosti elementarnih događaja označavamo s

$$p_1 = P(\{\omega_1\}), \quad p_2 = P(\{\omega_2\}), \dots, \quad p_n = P(\{\omega_n\})$$

i za njih vrijedi

$$p_1 > 0, \; p_2 > 0, \dots, p_n > 0$$

te

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Vjerojatnost nekog događaja A dobijemo kao zbroj vjerojatnosti elementarnih događaja iz A.
Primjerice, ako je $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, tada je $P(A) = p_1 + p_2 + p_4$.

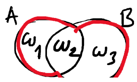
9. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ i $p_i = P(\{\omega_i\}), i = 1,2,3,4$. Je li preslikavanje $P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vjerojatnost ako je:
   a) $p_1 = 0.25, p_2 = 0.25, p_3 = 0.25, p_4 = 0.2$,
   b) $p_1 = 0.3, p_2 = 0.4, p_3 = 0.5, p_4 = -0.2$,
   c) $p_1 = 0.25, p_2 = 0.25, p_3 = 0.25, p_4 = 0.25$?

događaji

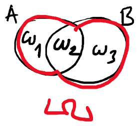
a) NE, jer $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \neq 1$
b) NE, jer $p_4 < 0$
c) DA

10. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ako je $P(\overbrace{\{\omega_1, \omega_2\}}^{A}) = 0.7, P(\overbrace{\{\omega_2, \omega_3\}}^{B}) = 0.6$, odredite vjerojatnosti događaja $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}$.

↓
$p_1, p_2, p_3 = ?$



$P(A) + P(\{\omega_3\}) = 1 = P(\Omega)$
$0.7 + p_3 = 1$



$$P(A) + P(\{\omega_3\}) = 1$$

$$0.7 + p_3 = 1$$

$$\underline{\underline{p_3}} = 1-0{,}7 = \underline{\underline{0{,}3}}$$

$$P(B) + P(\{\omega_1\}) = 1^{\;= P(\Omega)}$$

$$0.6 + p_1 = 1$$

$$\underline{\underline{p_1 = 0{,}4}}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_2 = 1 - p_1 - p_3$$

$$p_2 = 1 - 0{,}4 - 0.3$$

$$\underline{\underline{p_2 = 0{,}3}}$$