MATEMATIKA

Gauss-Jordanova metoda

Gauss-Jordanova metoda

Knjiga „*Matematika za IT*”

- Poglavlje „Gauss- Jordanova metoda”, str. 140. – 147.

Linearni sustavi

Opći oblik linearnog sustava od *m* jednadžbi s *n* nepoznanica je oblika:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Rješenje sustava je n-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koja zadovoljava sve jednadžbe.

Linearni sustavi

Linearni sustav se može zapisati u obliku matrične jednadžbe

$$AX = b.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A = matrica koeficijenata

X = vektor nepoznanica

b = desna strana sustava

Linearni sustavi

Zadan je linearni sustav:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & 2y & & & = & 4 \\ & & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

Pripadna matrična jednadžba:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proširena matrica sustava:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Gauss-Jordanova metoda eliminacije

- Koristi za rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

- **Elementarnim transformacijama** nad retcima proširenu matricu sustava $[A|b]$ svodimo na ekvivalentnu matricu $[I|b']$ gdje je *I* jedinična matrica.

- Rješenja sustava navedena su u stupčastoj matrici b'.

Gauss-Jordanova metoda eliminacije

Elementarne transformacije (nad recima):

- svaki red smijemo podijeliti (ili pomnožiti) realnim brojem različitim od nule
- red smijemo pomnožiti brojem i zbrojiti s nekim drugim redom
- redovima smijemo zamijeniti mjesta

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & -2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 4 \\ 2 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 5 & 1 & | & -4 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} : 5 \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & -\frac{4}{5} \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-2) \quad \cdot 2 \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & | & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} & | & \frac{13}{5} \end{bmatrix} : \frac{13}{5} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & | & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \cdot\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \end{matrix}$$

Gauss-Jordanova metoda eliminacije

Iz dobivene matrice čitamo:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boxed{1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2} \quad \Rightarrow \quad x = 2$$
$$0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

Ovakvo rješenje sustava nazivamo **jedinstveno rješenje**.

To znači da postoji točno jedna vrijednost za varijable x, y i z koje zadovoljava sve zadane linearne jednadžbe.

Gauss-Jordanova metoda eliminacije

Pomoću Gaussove metode riješite sustav:

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 2 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & -2 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & | & -2 \\ 2 & 1 & 0 & | & 2 \\ 3 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \cdot (-3) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & | & -2 \\ 0 & 5 & 4 & | & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{4} & | & \cancel{6} \end{bmatrix} :5 \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & | & -2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & | & \frac{6}{5} \\ 0 & 5 & 4 & | & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot 2 \quad \cdot(-5) \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & | & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & | & \frac{6}{5} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow x - \frac{2}{5}z = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{5}t + \frac{2}{5}} \\ \Rightarrow y + \frac{4}{5}z = \frac{6}{5} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{4}{5}t + \frac{6}{5}} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z = t \\ t \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Parametarsko rješenje sustava

Gauss-Jordanova metoda eliminacije

Parametarskih rješenja sustava ima **beskonačno mnogo**.

Za svaku novu vrijednost parametra dobivamo nova rješenja sustava.

$x = \frac{2}{5}z + \frac{2}{5}$	$x = \frac{2}{5}$	$x = 0$	$x = \frac{4}{5}$
$y = -\frac{4}{5}z + \frac{6}{5}$	$y = -\frac{4}{5}$	$y = 2$	$y = \frac{2}{5}$
$z = t, \quad t \in \mathbb{R}$	$z = 0$	$z = -1$	$z = 1$

Gauss-Jordanova metoda eliminacije

Pomoću Gaussove metode riješite sustav:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ 2x & - & y & - & z & = & -3 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot 1 \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{\quad +} \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :(-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1)\cdot(-3) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Iz zadnjeg reda matrice iščitavamo jednadžbu:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3$$

$$0 = 3$$

Ne postoje $x, y, z \in \mathbb{R}$ koji mogu zadovoljiti tu jednadžbu.
Kažemo da takav sustav **nema rješenja**.
Za takav sustav još kažemo da je **kontradiktoran**, **singularan**, **nesuglasan**.

Inverzna matrica

Inverzna matrica matrice A, u oznaci A^{-1} je matrica za koju vrijedi

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Inverznu matricu računamo pomoću Gaussove metode:

$$[A \mid I] \sim \cdots \sim [I \mid A^{-1}]$$

Dakle, matricu A proširimo jediničnom matricom, te vršimo Gaussove transformacije sve dok na mjestu matrice A ne dobijemo jediničnu matricu. Matrica koju dobijemo na mjestu proširenja je jednaka inverznoj matrici, A^{-1}.

Inverzna matrica

Odredite A^{-1} ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Inverzna matrica

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 10 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Provjera: $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 10 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Inverzna matrica

Odredite A^{-1} ako je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0} & & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Matrice koje **nemaju** inverz nazivamo **singularne** matrice.

Matrice koje **imaju** inverz nazivamo **regularne** matrice.

Matrične jednadžbe

Inverz matrice A^{-1} koristimo kod rješavanja matričnih jednadžbi.

Primjer: Odredite matricu $X \in M_2$ ako vrijedi $A \cdot X = B$, te je poznato $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} \cdot | \quad A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Matrične jednadžbe

Primjer: Odredite matricu $X \in M_2$ ako vrijedi $A \cdot X = B$, te je poznato $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\;\middle|\;\overbrace{\begin{matrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{matrix}}^{A^{-1}}\right]$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Matrične jednadžbe

Odredite matricu $X \in M_2$ ako vrijedi $X \cdot A \cdot B = I$, te je poznato $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$X \cdot A \cdot B = I \qquad | \cdot B^{-1}$$

$$X \cdot A \cdot I = I \cdot B^{-1}$$

$$X \cdot A = B^{-1} \qquad | \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot I = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$\boxed{X = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

Matrične jednadžbe

Odredite matricu $X \in M_2$ ako vrijedi $X \cdot A \cdot B = I$, te je poznato $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{X = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

$$A^{-1} \ldots \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$B^{-1} \ldots \quad \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$X = B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hvala ☺