MATEMATIKA

Polinomi

Polinomi

Knjiga „*Matematika za IT*"

- Poglavlje „Polinomi", str. 6. – 25.

Neka su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tada se

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

naziva polinomom n-tog stupnja.

Brojevi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se nazivaju koeficijentima polinoma.

Stupanj polinoma je najveća potencija varijable x.

Svaki pojedini dio polinoma koji se zbraja naziva se monom.

Polinomi

Kojeg su stupnja navedeni polinomi?

a) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$ Polinom drugog stupnja

b) $q(x) = x^2 + 6x^5 + 12x^3 - 1$ Polinom petog stupnja

c) $p(x) = \sqrt{x} + 4$ Nije polinom

d) $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^4$ Polinom četvrtog stupnja

e) $p(x) = 1$ Polinom nultog stupnja

f) $r(x) = 0$ Nul-polinom

g) $g(x) = \frac{x^3}{3} - x + \sin x$ Nije polinom

h) $h(x) = \frac{1}{3} - 2x + \frac{4}{x}$ Nije polinom

Jednakost polinoma

Polinomi $p(x)$ i $q(x)$ su jednaki ako:

- su jednakog stupnja

- im se **svi** koeficijenti podudaraju.

Jesu li polinomi $q(x) = (x-1)(x+1)$ i $p(x) = x^2 - 1$ jednaki?

Da.

Jednakost polinoma

Primjer

Odredite a, b, c i d takve da polinom

$p(x) = a\,x^3 + 3x - 2$ i polinom

$q(x) = -b\,x^d + 4x^c - 2$ budu jednaki.

Rješenje:

$$a = 4, \qquad b = -3, \qquad c = 3, \qquad d = 1.$$

Zbrajanje i oduzimanje polinoma

Polinomi se zbrajaju (oduzimaju) tako da se zbrajaju (oduzimaju) koeficijenti uz iste potencije.

Primjer. Odredite zbroj i razliku polinoma $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - x$ i $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

$$p(x) + q(x) = (2x^3 - 4x^2 - x) + (x^2 + 3x + 2) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

$$p(x) - q(x) = (2x^3 - 4x^2 - x) - (x^2 + 3x + 2) = 2x^3 - 5x^2 - 4x - 2$$

Množenje polinoma

Polinomi se množe tako da se svaki monom iz prvog polinoma pomnoži sa svakim monomom iz drugog polinoma.

Primjer. Odredite umnožak polinoma $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - x$ i $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^3 - 4x^2 - x) \cdot (x^2 + 3x + 2)$$

$$= 2x^3 \cdot x^2 + 2x^3 \cdot 3x + 2x^3 \cdot 2 - 4x^2 \cdot x^2 - 4x^2 \cdot 3x - 4x^2 \cdot 2 - x \cdot x^2 - x \cdot 3x - x \cdot 2$$

$$= 2x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^4 - 12x^3 - 8x^2 - x^3 - 3x^2 - 2x$$

$$= 2x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 11x^2 - 2x$$

Dijeljenje polinoma

Polinom $p(x)$ se može podijeliti polinomom $q(x)$ samo ako je stupanj polinoma $p(x)$ veći ili jednak stupnju polinoma $q(x)$.

$$p(x):q(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{r(x)}_{\text{RJEŠENJE}} + \frac{\overbrace{o(x)}^{\text{OSTATAK}}}{\underbrace{q(x)}_{\text{DJELITELJ}}}$$

Ako je stupanj polinoma $p(x)$ jednak n, a stupanj polinoma $q(x)$ jednak m, tada je stupanj polinoma $r(x)$ jednak $n - m$, a stupanj polinoma ostatka $o(x)$ je manji od m.

Dijeljenje polinoma

Primjer. Podijelite polinom $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - x$ polinomom $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

rješenje, $r(x)$

$$(2x^3 - 4x^2 - x) : (x^2 + 3x + 2) = 2x - 10$$

$$- \quad 2x^3 + 6x^2 + 4x$$

$$-10x^2 - 5x$$

$$- \quad -10x^2 - 30x - 20$$

$$25x + 20$$

ostatak, $o(x)$

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x}{x^2 + 3x + 2} = 2x - 10 + \frac{25x + 20}{x^2 + 3x + 2}$$

Nultočke polinoma

Broj x_1 za kojeg vrijedi $p(x_1) = 0$ naziva se nultočka polinoma $p(x)$.

Osnovni teorem algebre:

Svaki polinom n-tog stupnja ima točno n nultočaka $x_1, x_2, \dots, x_n$, računajući kratnost i polinom $p(x)$ se može zapisati u obliku:

$$p(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Polinom nultog stupnja

Polinom oblika $p(x) = a_0$ nazivamo polinomom nultog stupnja.

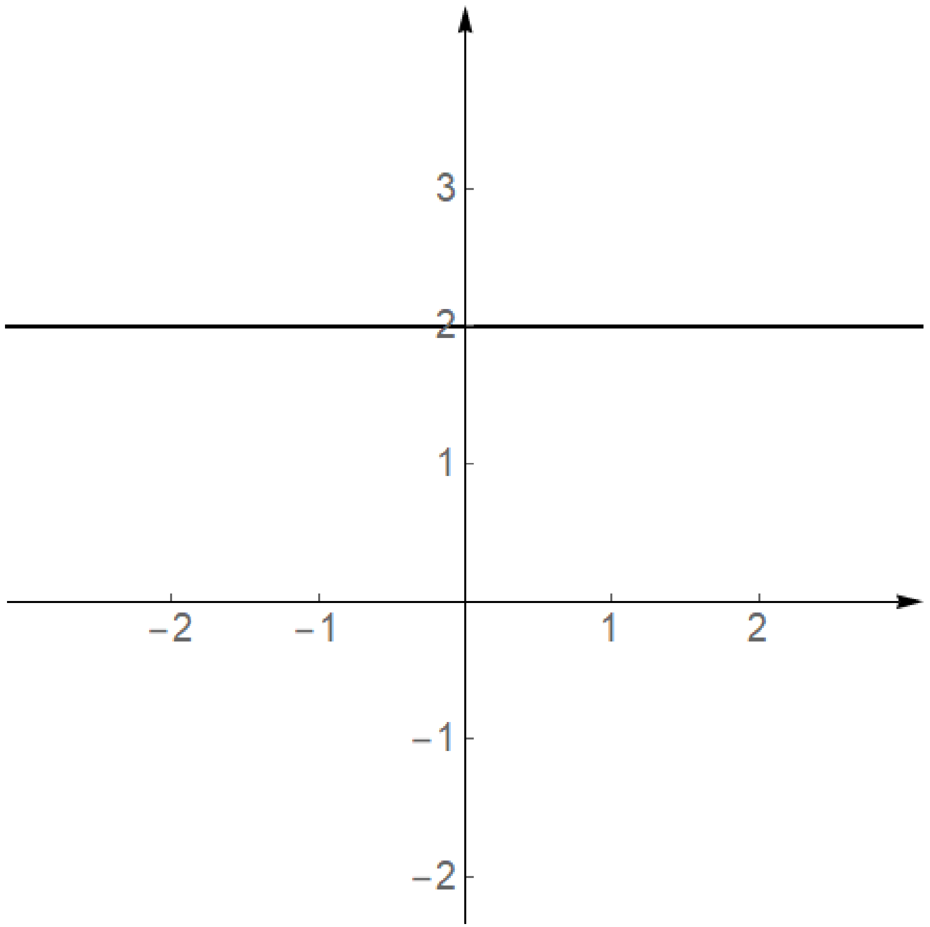
Uvjet: $a_0 \neq 0$

$f(x) = c \neq 0$

polinom nultog stupnja

$f(x) = 0$

nul-polinom



Na slici je prikazan graf polinoma nultog stupnja, pravac $y = 2$.

Polinom prvog stupnja

Polinom oblika $p(x) = a_1 x + a_0$ nazivamo polinomom prvog stupnja.

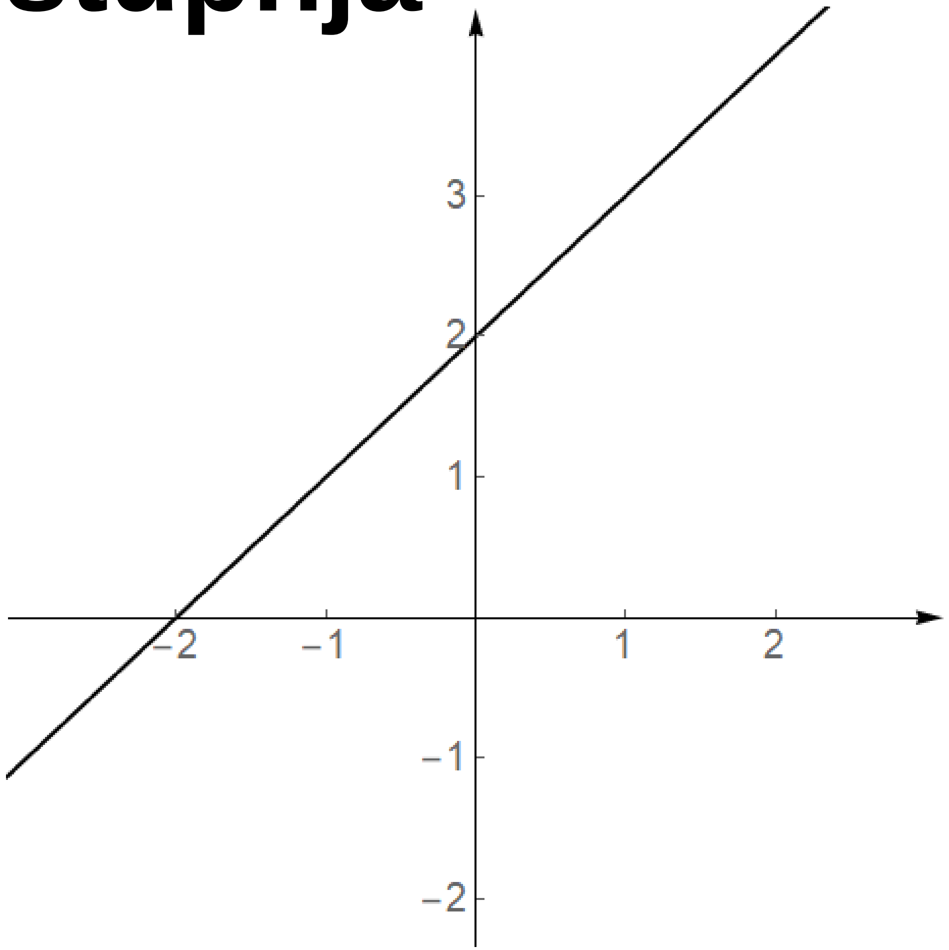
Uvjet: $a_1 \neq 0$

Drugi naziv: **linearna funkcija**

Drugi zapis: $y = kx + l$

Parametar k nazivamo **koeficijentom smjera** linearne funkcije (pravca).

Parametar l zovemo **odsječkom na osi ordinata**.



Pravac $y = x + 2$

Polinom prvog stupnja

Geogebra: https://www.geogebra.org/m/a9k6ww9r

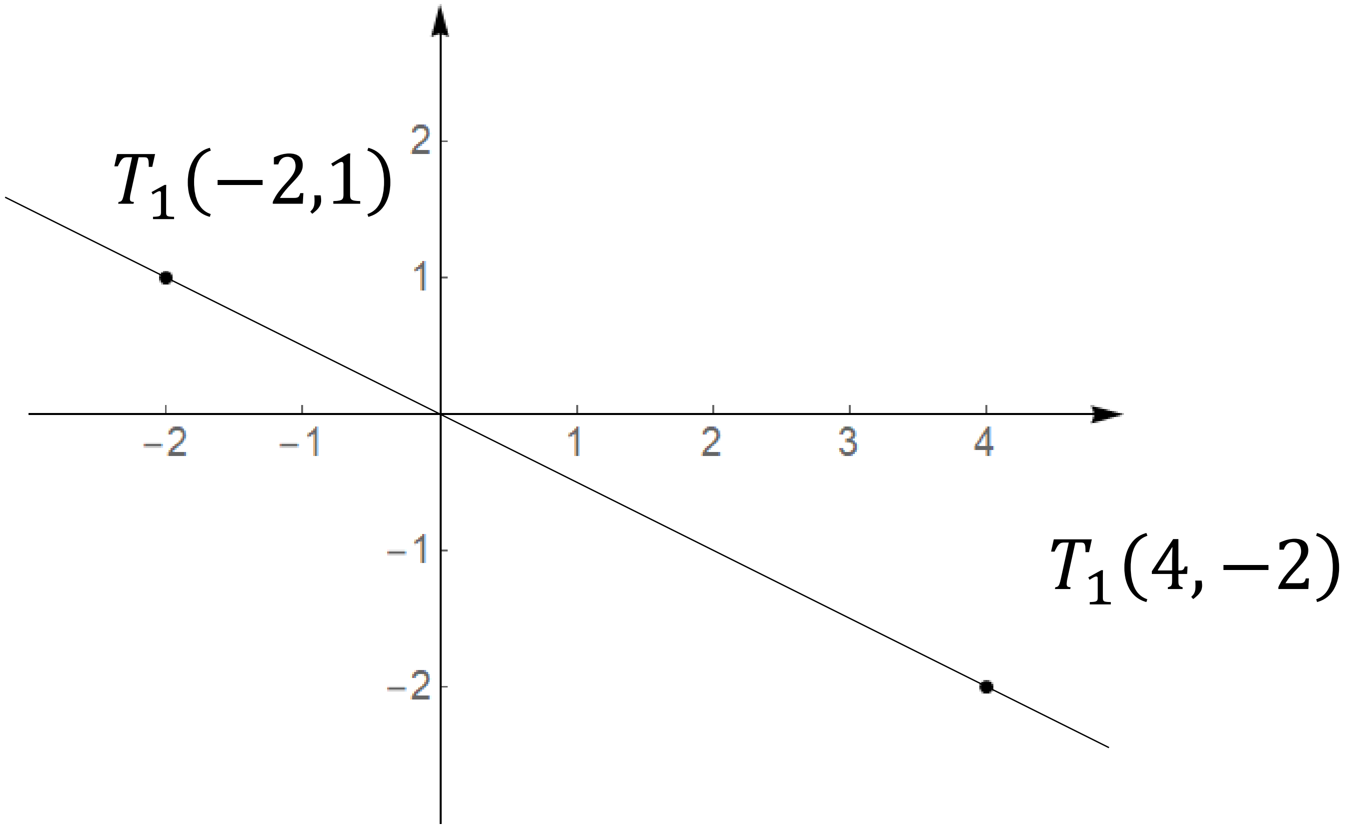
Video materijali Tonija Miluna:

https://www.youtube.com/watch?v=YiZE6D6ghgM&list=PLF089B9DAE18467D4 (prva 3 videa)

https://www.youtube.com/watch?v=mlwV1jyYyoI (1 video)

Polinom prvog stupnja

S koliko je najmanje točaka određena jednadžba pravca?



Odredite jednadžbu pravca sa slike.

$$y = -\frac{1}{2}x$$

ALGEBRA

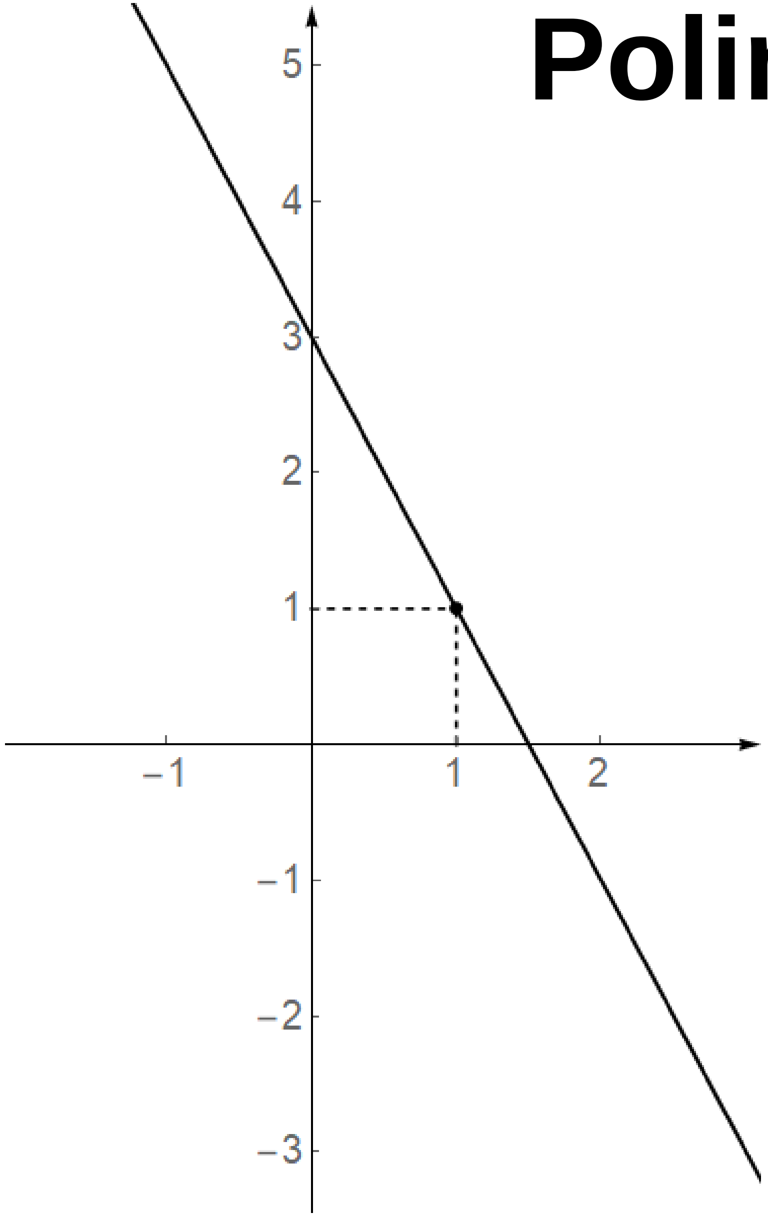
Polinom prvog stupnja

Jednadžba pravca kroz dvije točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

Ili rješavanjem jednadžbi:

$$y_1 = k \cdot x_1 + l$$
$$y_2 = k \cdot x_2 + l$$



Polinom prvog stupnja

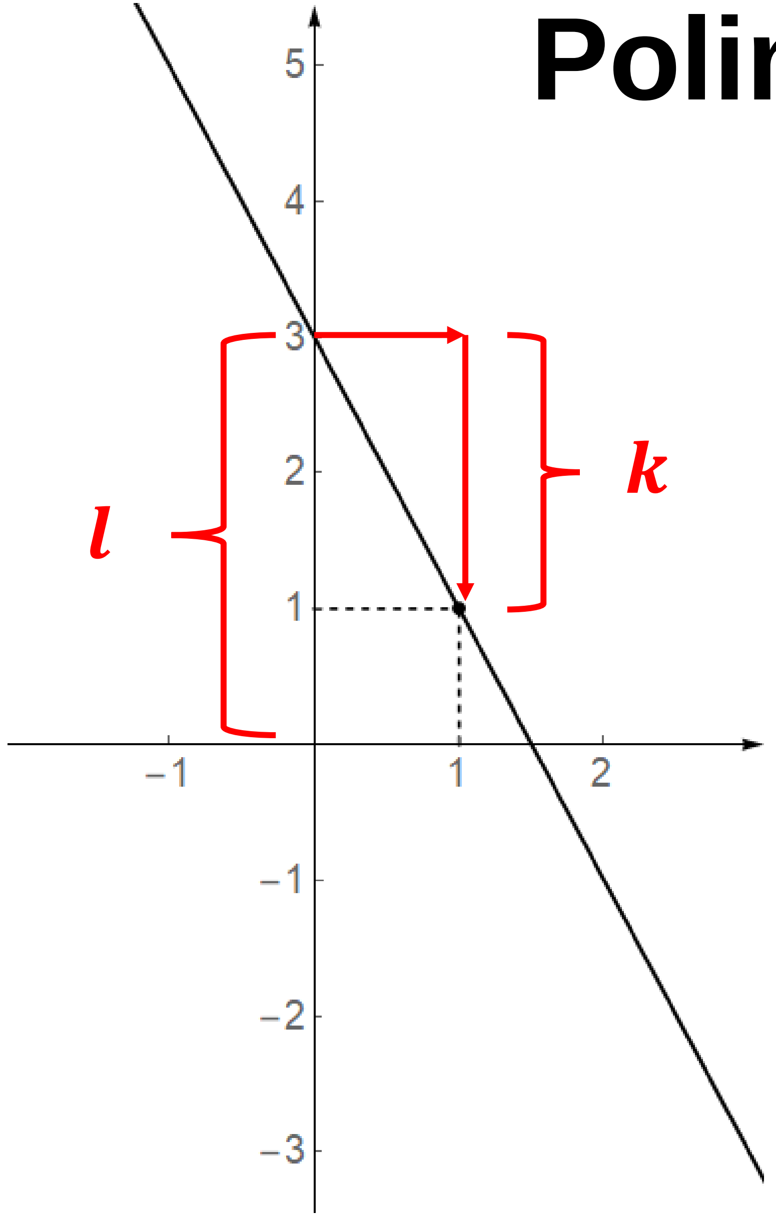
Kako glasi jednadžba polinoma čiji je graf prikazan na slici?

Rješenje: $p(x) = -2x + 3$

Primijenite osnovni teorem algebre.

$$p(x) = -2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Polinom prvog stupnja



Kako glasi jednadžba polinoma čiji je graf prikazan na slici?

Rješenje: $p(x) = -2x + 3$

Koeficijent smjera k i odsječak l ponekad možemo očitati neposredno s grafa funkcije:

$l = 3$ $\qquad$ $k = -2$

Polinom drugog stupnja

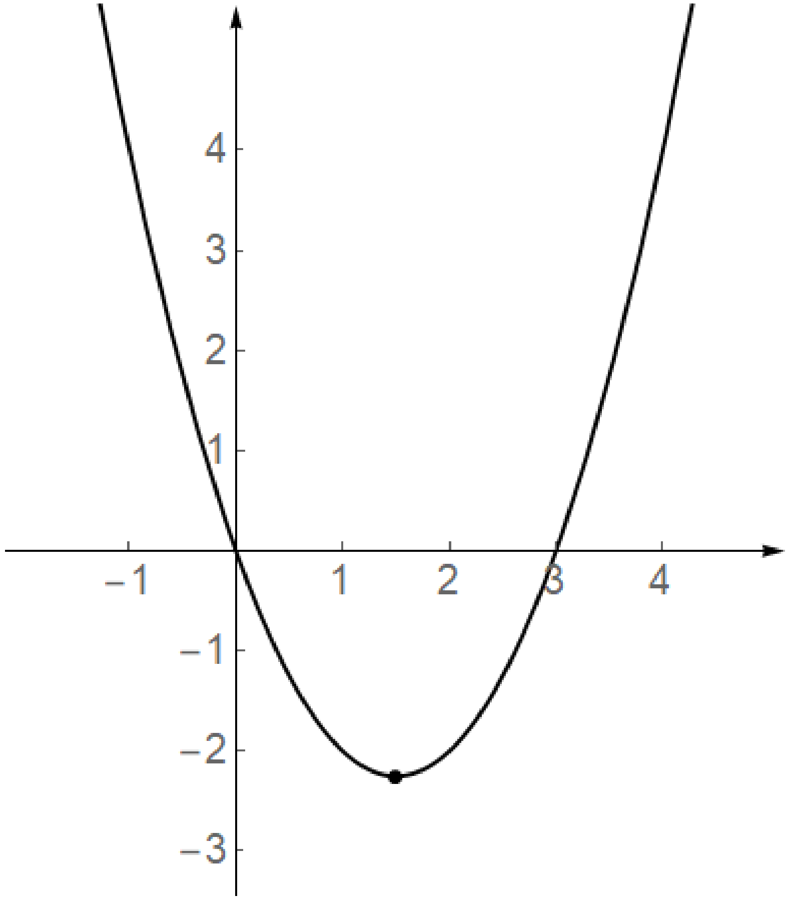
Polinom oblika $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ nazivamo polinomom drugog stupnja.

Uvjet: $a_2 \neq 0$

Naziv grafa: **parabola**

Drugi zapis: $y = ax^2 + bx + c$

Parabolu crtamo pomoću dva ključna elementa: nultočki i tjemena.



Parabola $y = x^2 - 3x$

Polinom drugog stupnja

Nultočke kvadratne funkcije:.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Koordinate tjemena:

$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Diskriminanta kvadratne funkcije:

$$D = b^2 - 4ac$$

O diskriminanti ovisi koliko će kvadratna funkcija imati nultočki: niti jednu, jednu ili dvije.

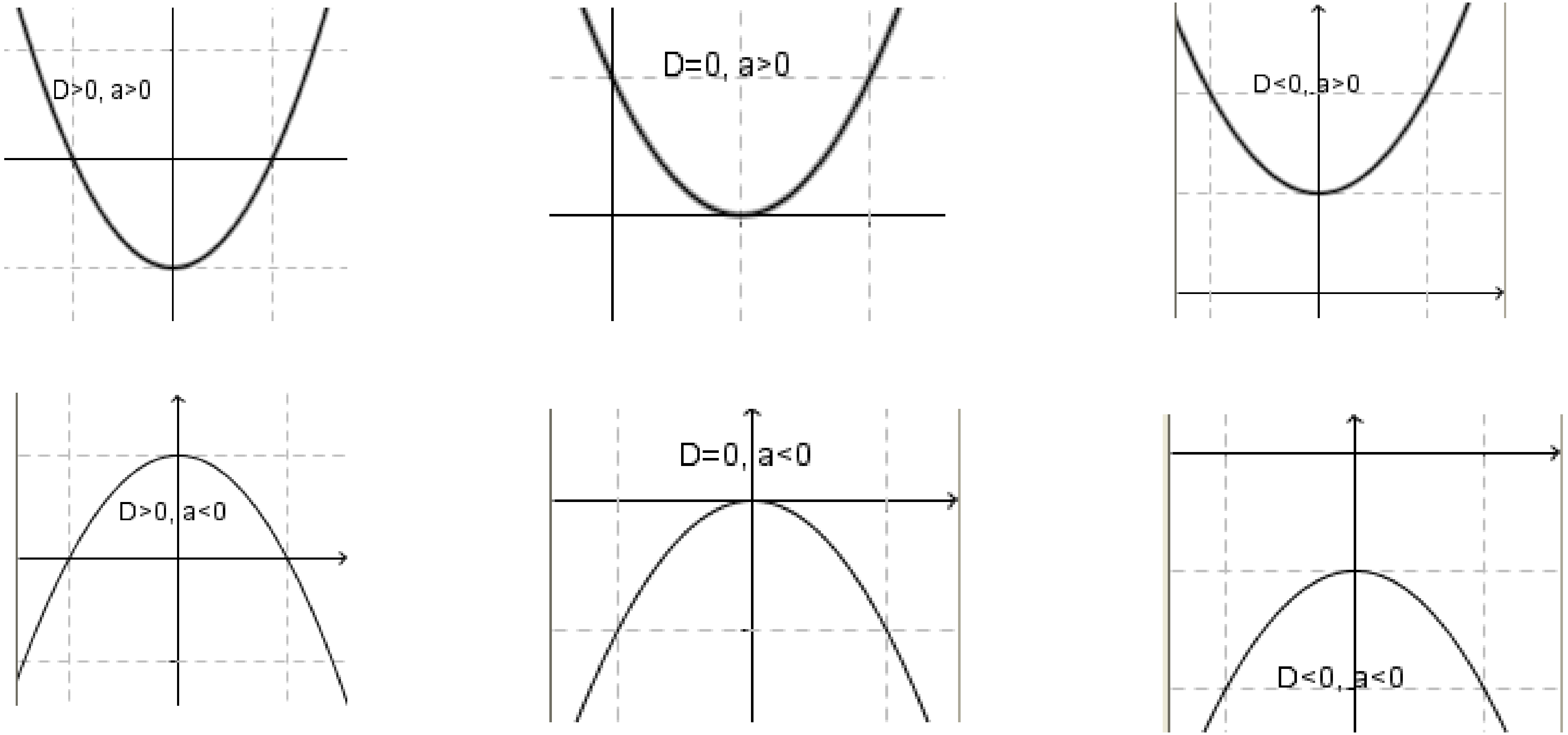
Polinom drugog stupnja

Geogebra: https://www.geogebra.org/m/GfTkp7Pe

Video materijali Tonija Miluna:

https://www.youtube.com/watch?v=SL5F8eZVzPE&list=PLXygsnSpBk5Q90Vg6fKKPDCI7PzN6WVjC (prva 4 videa)

Polinom drugog stupnja



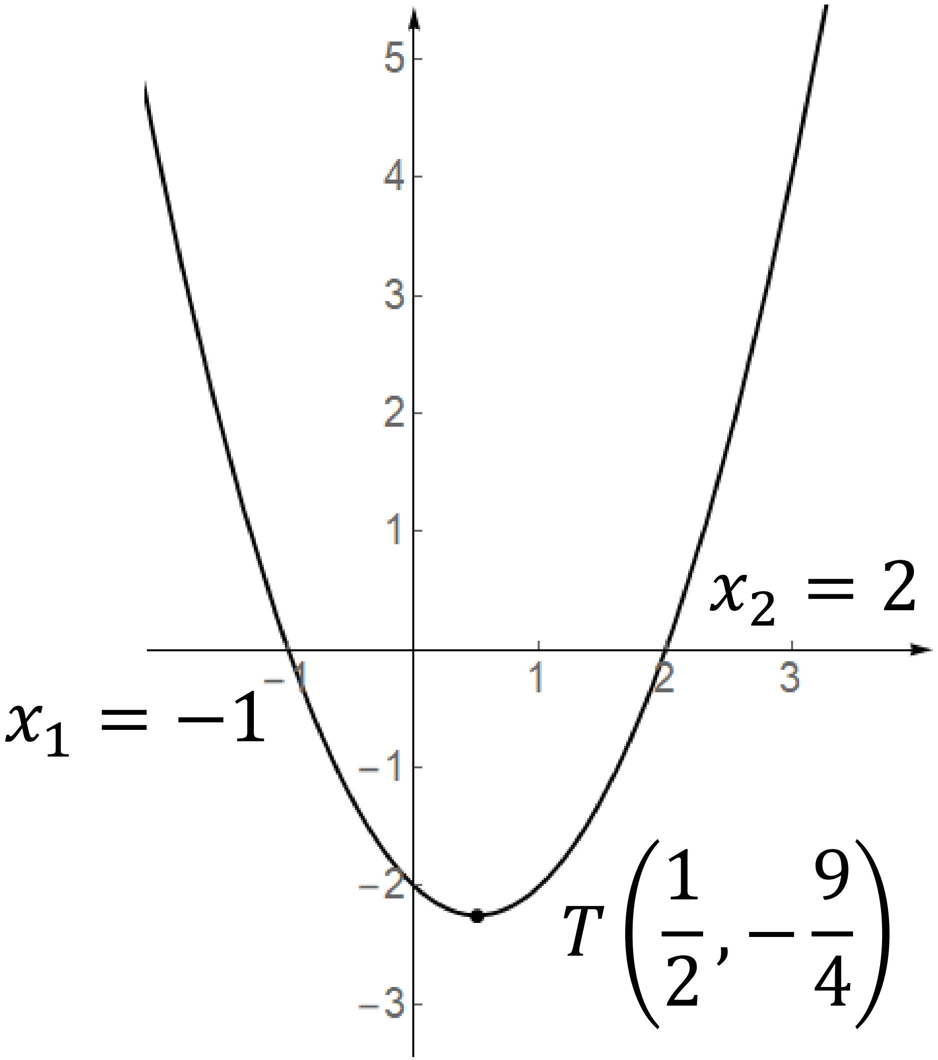
Polinom drugog stupnja

Skicirajte graf funkcije $f(x) = x^2 - x - 2$.

Označite nultočke i tjeme.

Primijenite osnovni teorem algebre.

$$f(x) = (x+1)(x-2)$$



Polinom drugog stupnja

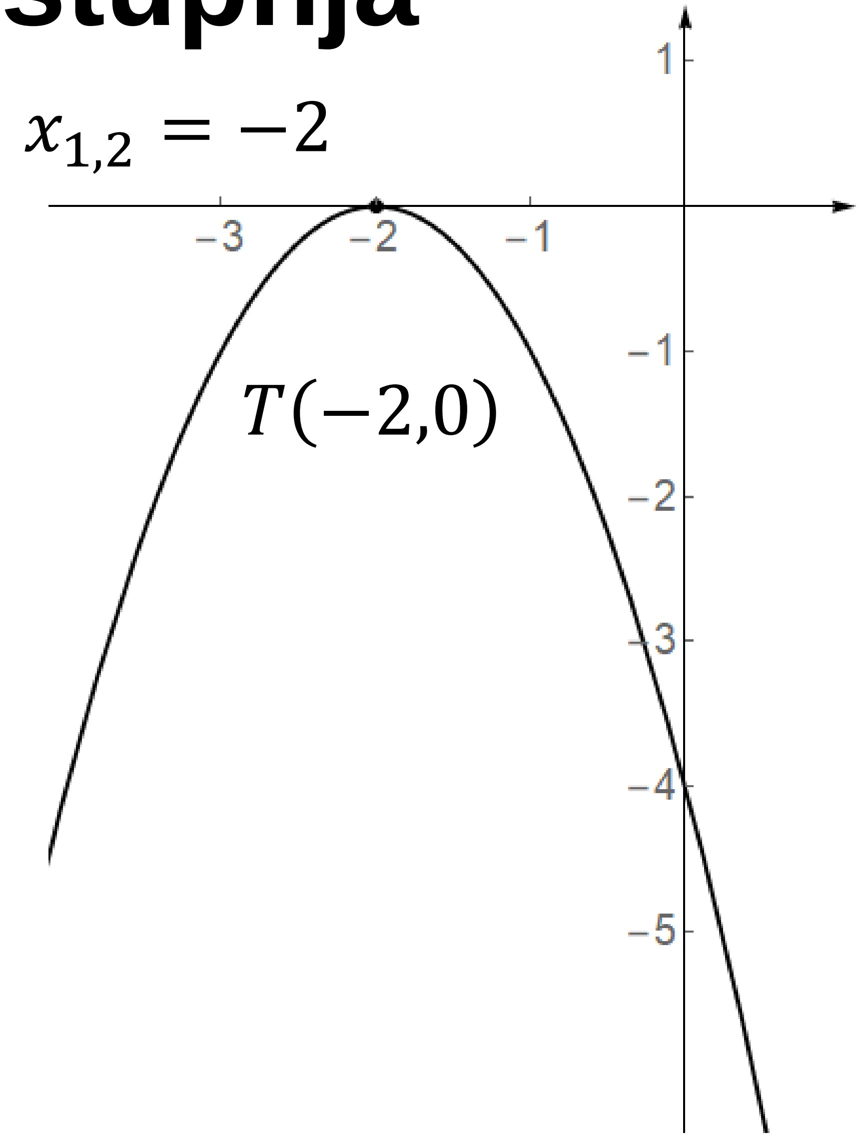
Skicirajte graf funkcije

$$f(x) = -x^2 - 4x - 4.$$

Označite nultočke i tjeme.

Primijenite osnovni teorem algebre.

$$f(x) = -(x+2)(x+2)$$



Polinom drugog stupnja

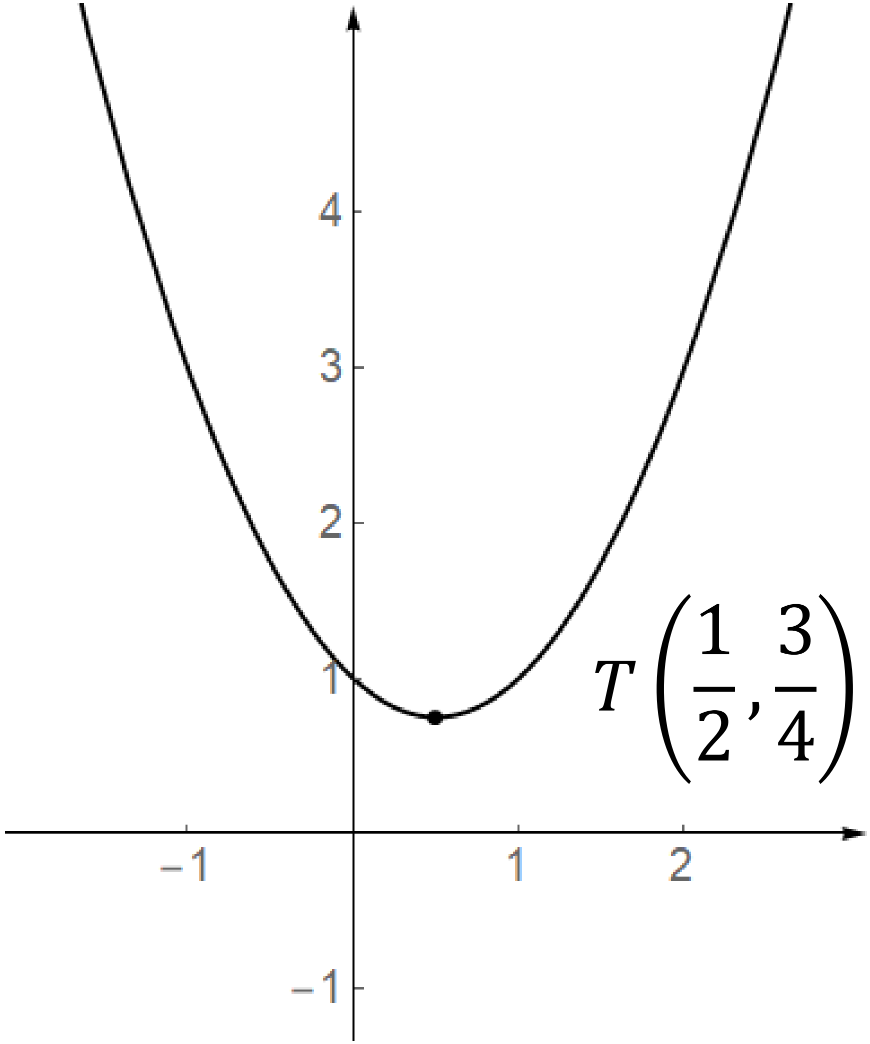
Skicirajte graf funkcije

$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

Označite nultočke i tjeme.

Nema realnih nultočki.

Ne možemo primijeniti osnovni teorem algebre s realnim faktorima.



Polinom trećeg stupnja

Polinom $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ nazivamo polinomom trećeg stupnja.

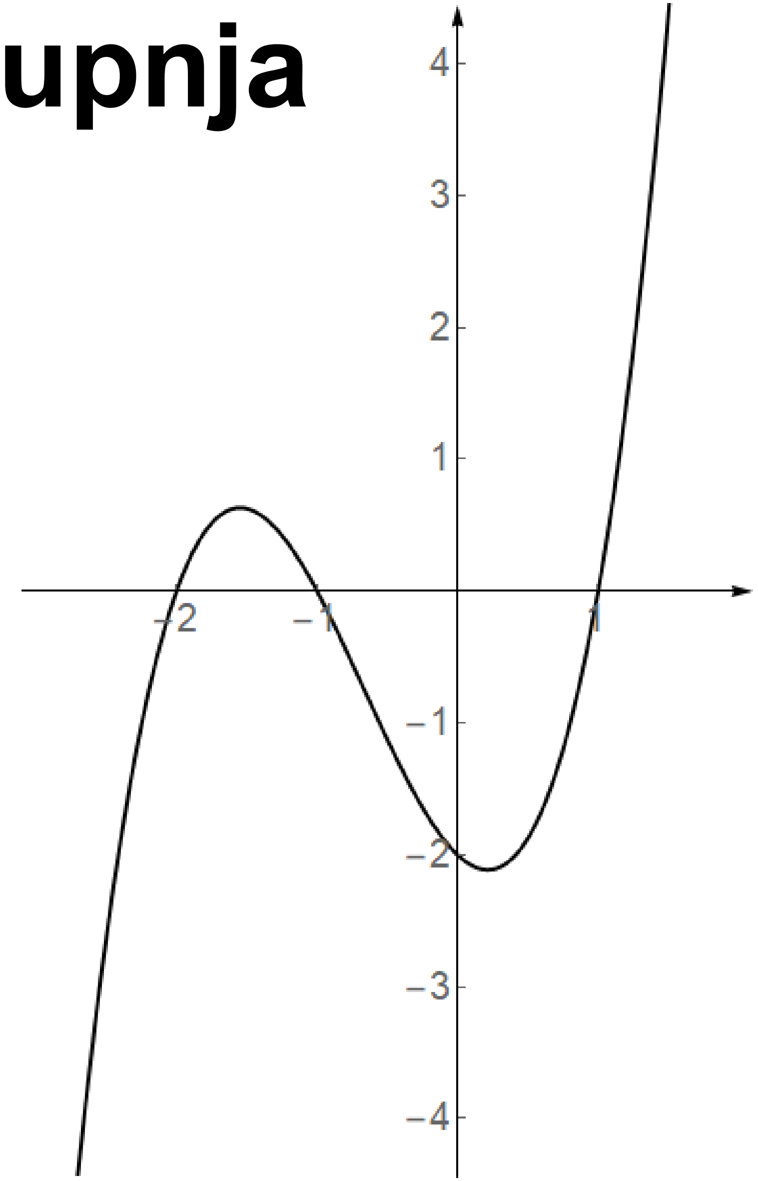
Uvjet: $a_3 \neq 0$

Kubna funkcija.

Kubna funkcija maksimalno može imati tri realne nultočke.

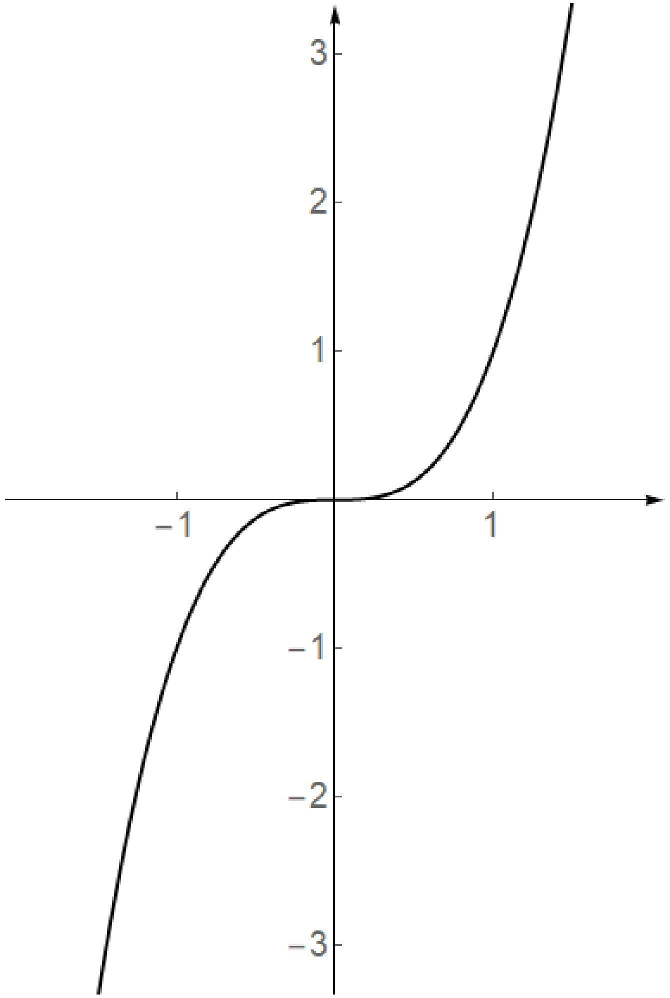
$$y = (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$$

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

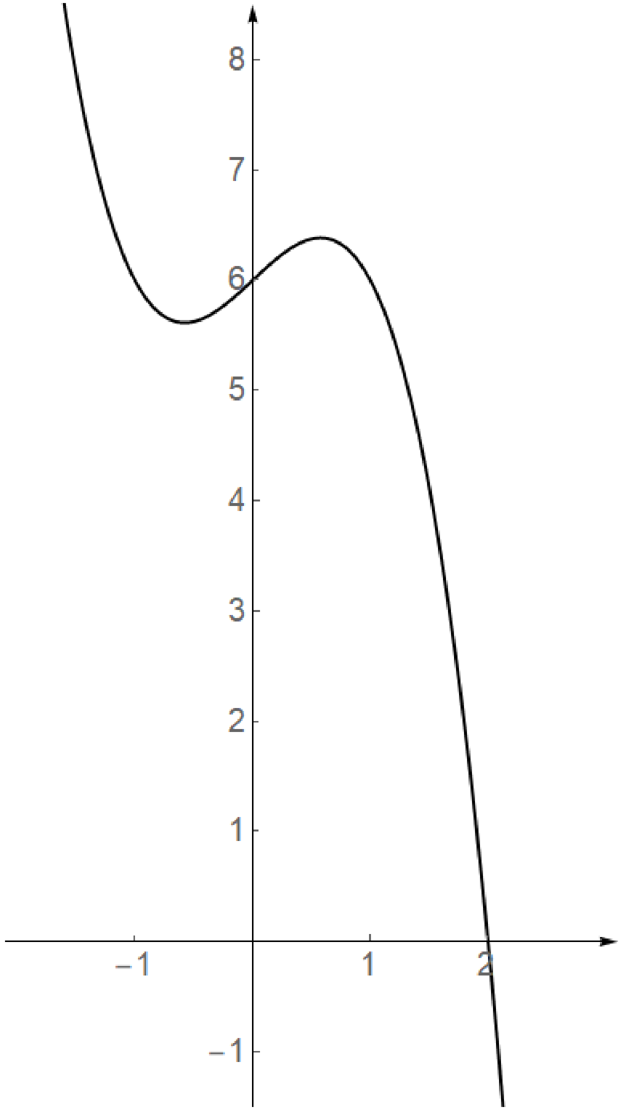


ALGEBRA

Kubna funkcija s jednom nultočkom:

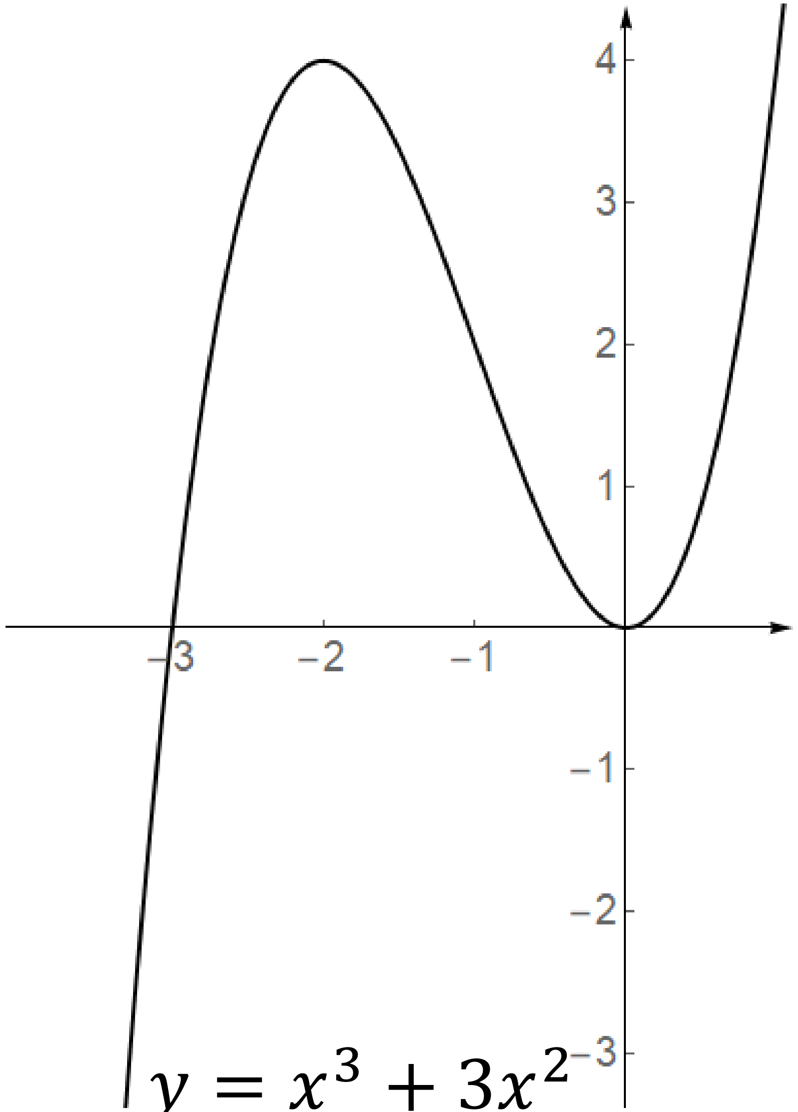


$y = x^3$

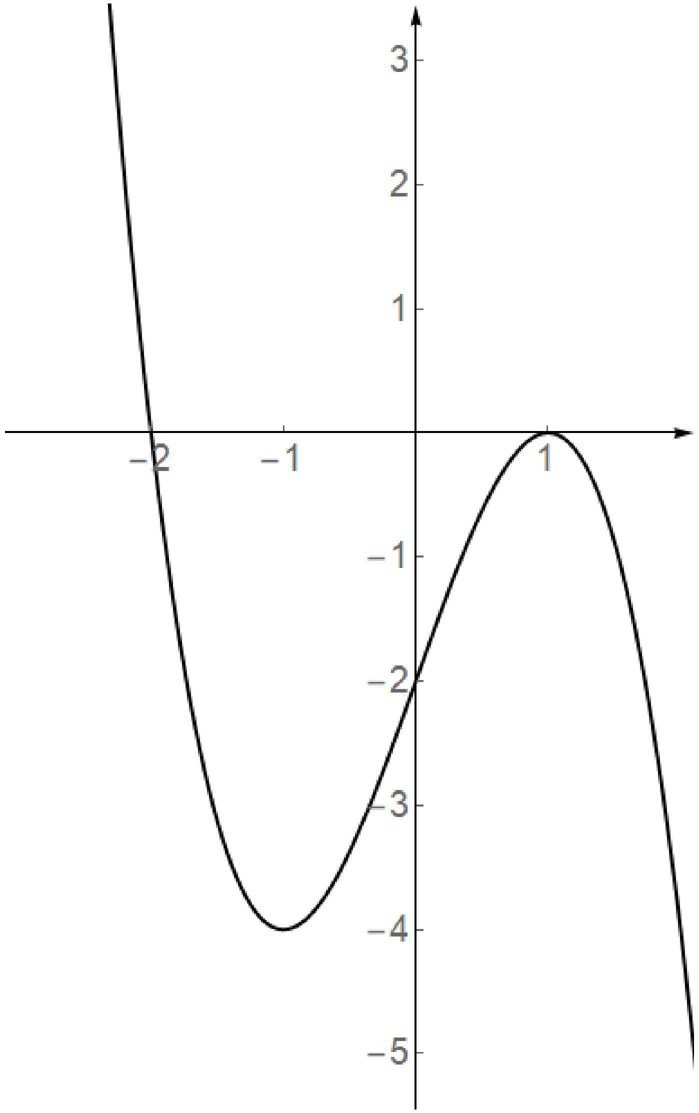


$y = -x^3 + x + 6$

Kubna funkcija s dvije nultočke:



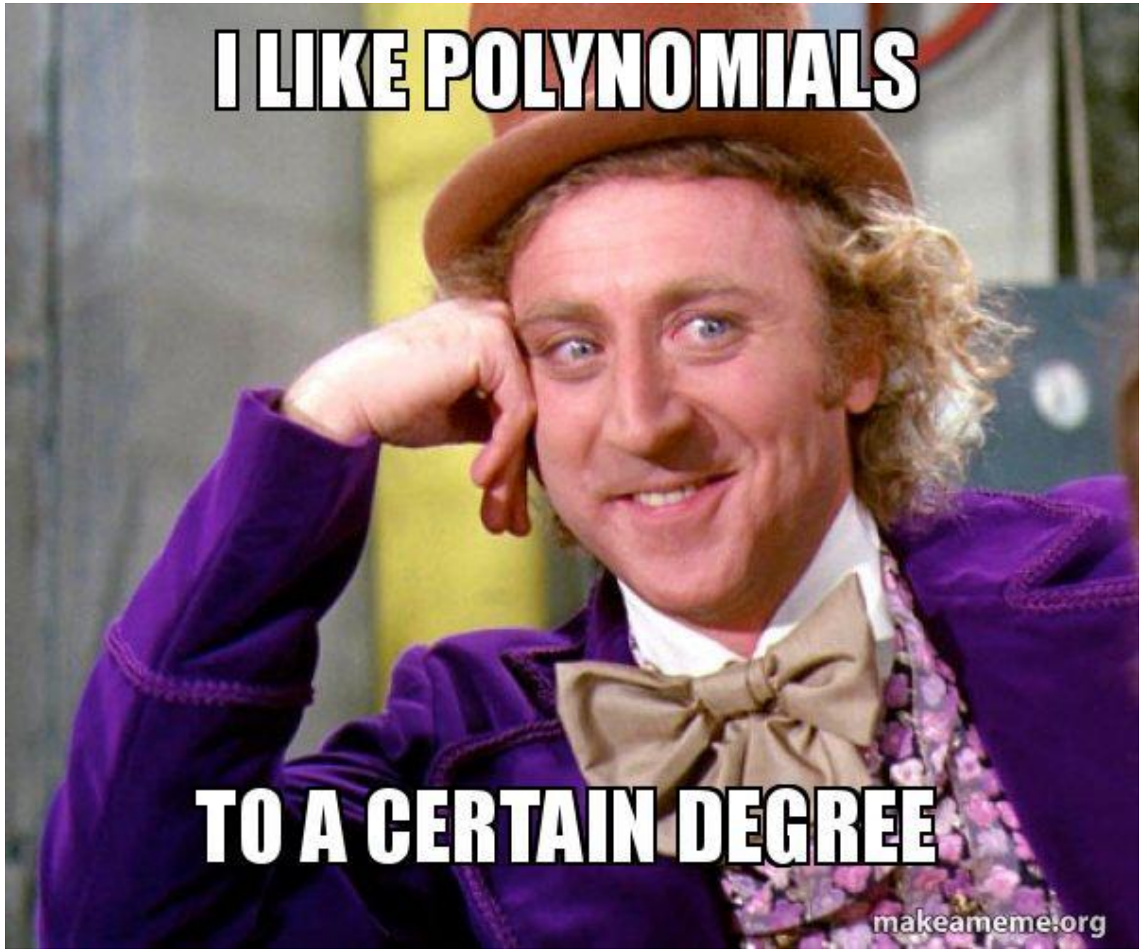
$$y = x^3 + 3x^2$$



$$y = -x^3 + 3x - 2$$

Geogebra: https://www.geogebra.org/m/Uz8GPat3

Kviz: https://tinyurl.com/y529vyt3



Hvala na pažnji!

☺