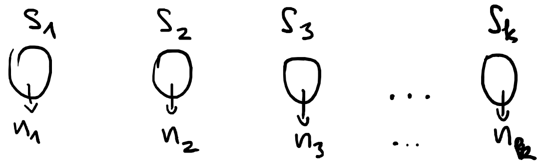
KOMBINATORIKA (prve 3 vježbe)

Osnovna pravila prebrojavanja

Pravilo zbroja

broj elem.



→ nemaju zajedničkih elem. (DISJUNKTNI su)

BIRAMO 1 element iz S_1 ILI S_2 ILI S_3 ...

TO MOŽEMO UČINITI NA

$n_1 + n_2 + \dots + n_k$ NAČINA !

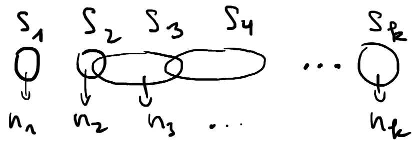
1. Iz Zagreba prema sjeveru vode 3 ceste, prema zapadu 2 ceste, a prema jugu 1 cesta. Na koliko načina se može cestom izaći iz Zagreba?

biramo 1 cestu na S ili Z ili J

$3 + 2 + 1 = 6$ načina

Pravilo umnoška

broj elem.



→ mogu imati zajedničke elem., štoviše, mogu biti svi isti skupovi

Biramo 1 element iz $\boxed{\text{svakog}}$ i slažemo u niz! BIRAMO iz S_1 I iz S_2 I ... S_k.

TAKVIH nizova ima

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$

2. U restoranu za ručak nude 3 vrste juhe, 4 vrste glavnih jela i 2 vrste salate. Koliko različitih ručaka koji se sastoje od 1 juhe, 1 glavnog jela i 1 salate možemo naručiti?

1j i 1g i 1s

$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ ručka →

$j_1 g_1 s_1$

$j_1 g_1 s_2$

$j_1 g_2 s_1$

$j_1 g_2 s_2$ ...

3. Na koliko načina između 5 Talijanki, 2 Francuskinje, 7 Čehinja i 3 Mađarice možemo odabrati:
   a) jednu osobu,
   b) po jednu Talijanku, Francuskinju, Čehinju i Mađaricu,
   c) 17 osoba?

a) biramo 1 : T ili F ili Č ili M

$5 + 2 + 7 + 3 = 17$ načina

b) po jednu : T i F i Č i M

$5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 210$ načina

c) 17 osoba : moramo ih odabrati sve, znači, na 1 način

4. Na polici imamo 20 knjiga iz programiranja, 14 knjiga iz matematike i 15 ostalih. Na koliko načina možemo odabrati:
   a) jednu knjigu s police,
   b) po jednu knjigu iz svake grupe?

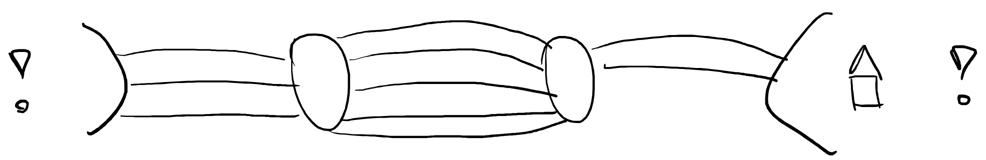
a) biramo 1 : P ili M ili O

$20 + 14 + 15 = 49$ načina

b) po jednu : P i M i O

$20 \cdot 14 \cdot 15 = 4200$ načina

5. Stanovnici Konisberga kreću iz lijevog dijela grada i trebaju prijeći dva otoka do desnog dijela grada u kojem se nalazi slastičarna. Lijevu obalu i prvi otok povezuju 3 mosta, prvi i drugi otok povezuje 5 mostova, a drugi otok i desnu obalu 2 mosta. Na koliko različitih načina mogu doći do slastičarne?



po 1 od svake skupine :

$\underline{3} \cdot \underline{5} \cdot \underline{2} = 30$ načina

6. Jedan test ima 20 pitanja na koje se odgovara s „da” ili „ne”.
   a) Koliko ima različitih mogućnosti popunjavanja tog testa?
   b) Ispišite sve mogućnosti ako test ima samo 3 pitanja.

1. koliko je dugačak niz?

b) Ispišite sve mogućnosti ako test ima samo 3 pitanja.

1. koliko je dugačak niz?

2. s koliko elem. mogu popuniti svako mjesto?

a) $\underset{1.}{\underline{2}} \cdot \underset{2.}{\underline{2}} \cdot \underset{3.}{\underline{2}} \cdots \underset{\text{20-ti element u nizu}}{\underline{2}} = 2^{20} = 1\ 048\ 576$

{da, ne} {da, ne} ...

b) $\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 2^3 = 8$

{da, ne}

DDD DNN
DDN NND
DND NDN
NDD NNN

7. Sportska prognoza ima 12 redaka. U svaki redak treba upisati: 0 - neriješeno, 1 – pobjeda domaćina ili 2 – pobjeda gosta. Na koliko se različitih načina može ispuniti sportska prognoza?

$\underset{1.}{\underline{3}} \cdot \underset{2.}{\underline{3}} \cdot \underset{3.}{\underline{3}} \cdots \underset{\text{12. element}}{\underline{3}} = 3^{12} = 531\ 441$ načina

{0, 1, 2} {0, 1, 2} ...

8. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva?

$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 9000$

$\cancel{0}$

{1, .., 9} {0, .., 9}

9. Koliko ima troznamenkastih brojeva u sustavu s bazom 3?

$\underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 18$

{0, 1, 2}

$\cancel{0}$

{1, 2} {0, 1, 2}

10. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji su:
   a) djeljivi s 5,
   b) djeljivi s 2,
   c) djeljivi s 4?

a) $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{2} = 18\ 000$

$\cancel{0}$ {0, 5}

{1-9} {0, .., 9} ↳ djeljiv s 5

b) $\underset{\cancel{0}}{\underline{9}} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underset{\{0,2,4,6,8\}}{\underline{5}} = 45\,000$

c) djeljiv s 4 → onda kada je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4

$\underset{\substack{1. \\ \cancel{0}}}{\underline{9}} \cdot \underset{2.}{\underline{10}} \cdot \underset{3.}{\underline{10}} \cdot \underset{4. i 5.}{\underline{25}} = 22\,500$

$\{00, 04, 08, 12, 16, \dots, 96\}$

$96 : 4 = 24$

$1 \cdot 4 \quad 2 \cdot 4 \quad 3 \cdot 4 \quad 4 \cdot 4 \quad 24 \cdot 4$

⇒ ukupno 25

2. način → svaki drugi od djeljivih sa 2 je djeljiv s 4 : $45\,000 : 2 = 22\,500$

11. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10 000 kojima su sve znamenke parni brojevi?

1, 2, 3 ...

parni : $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

1. način taj broj može biti

jednoznamenkast $\underset{\cancel{0}}{\underline{4}}$ $\{2,4,6,8\}$ +

ILI

dvoznam. $\underset{\substack{\cancel{0} \\ \{2,4,6,8\}}}{\underline{4}} \cdot \underset{\{0,2,4,6,8\}}{\underline{5}} = 20$ +

ILI

troznam. $\underset{\cancel{0}}{\underline{4}} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 100$ +

ILI

četveroznam. $\underset{\cancel{0}}{\underline{4}} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 500$

624 brojeva

2. način $\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 5^4 = 625$

može 0

Odg: $625 - 1 = 624$

sve 0

0000

12. Registarska tablica automobila se sastoji od oznake mjesta, tri ili četiri znamenke i jednog ili dva slova (osim znakova: č, ć, đ, š, ž, dž, lj, nj). Koliko se različitih tablica može napraviti za jedno mjesto?

$30 - 8 = 22$ slova

3z i 1s: $\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$ i $\underline{22}$ ILI 3z i 2s: $\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$ i $\underline{22} \cdot \underline{22}$ ILI 4z i 1s: $\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$ i $\underline{22}$ ILI 4z i 2s: $\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$ i $\underline{22} \cdot \underline{22}$

može 0
$\{0, .., 9\}$

$22 \cdot 10^3 + 10^3 \cdot 22^2 + 10^4 \cdot 22 + 10^4 \cdot 22^2$

$= 5\ 566\ 000$

13. Koliko ima različitih peteroznamenkastih brojeva koji:
   a) ne sadrže znamenku 1,
   b) sadrže točno jednu znamenku 1,
   c) sadrže barem jednu znamenku 1,
   d) sadrže barem dvije znamenke 1?

a) $\underline{8} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} = 52\ 488$

$\{2, .., 9\}$

b) točno jednu → raspisati slučajeve

1 na 1. mjestu: $\underline{1} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} = 9^4 = 6561$
$\{1\}$

+

ILI

1 na 2. mjestu: $\underline{8} \cdot \underline{1} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} = 8 \cdot 9^3 =$
$\{1\}$

+

ILI

1 na 3. mjestu: $\underline{8} \cdot \underline{9} \cdot \underline{1} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} = 8 \cdot 9^3$
$\{1\}$

+

ILI

1 na 4. mj. $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 9 = 8 \cdot 9^3$

+

ILI

1 na 5. mj. $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 8 \cdot 9^3$

Ukupno: $9^4 + 4 \cdot 8 \cdot 9^3$

$= 29\ 889$

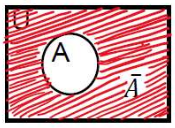
|C|

1 na 5. mj. $\quad 8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 1 = 8\cdot 9^3 = 29\,889$

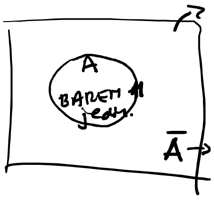
C) BAREM JEDNA jedinica

Pravilo komplementa: Neka je U univerzalan skup te neka je $A \subseteq U$. Tada je broj elemenata komplementa skupa A jednak

$$c(\bar{A}) = c(U) - c(A).$$



Pravilo komplementa koristimo kada je lakše odrediti broj elemenata komplementa skupa nego broj elemenata samog skupa.



svi peteroznam. U

$\bar{A}$ → oni bez jedinice

broj elem. barem jedan — svi — bez 1

$$\boxed{c(A) = c(U) - c(\bar{A})}$$

$$c(A) = 9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 - 8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 31\,512$$

d) BAREM DVIJE jedinice

peteroznam. ~~brojevi imaju~~:

svi: 0 ili 1 ili 2 ili 3 ili 4 ili 5 jedinica

barem dvije

barem dvije = svi − oni sa 1 jedin. − oni bez jedn.

$= 90\,000 - \underset{b)}{29\,889} - \underset{a)}{52\,448}$

$= 7\,623$

14. Koliko ima nizova duljine 7 sastavljenih od 0 i 1 sa:
    a) barem 2 nule,
    b) najviše 6 jedinica?

a) barem 2 nule (2 ili više) = svi nizovi − točno 1 nula − niti jedne nula

$= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ $\quad \{0,1\}$

0111111
1011111
1101111
⋮ ima ih 7

1111111
ima ih 1

$= 128 - 7 - 1$

$= 120$

b) najviše 6 jedinica = svi − oni sa 7 jedinica
(6 ili manje)

1 1 1 1 1 1 1

= 128 − 1

= 127